PUBLICATIONS

DU LABORATOIRE

D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

Secrétaire, **M. ALLIAUME**

Vol. VII (nos 62 à 75)
1930

LOUVAIN
LIBRAIRIE UNIVERSITAIRE
UYSTPRUYST, éditeur
1931

moff 4/1
part
(1)

ONT COLLABORÉ A CE VOLUME

M. Ch. de la Vallée Poussin, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Louvain (n° 75).

M. M. Alliaume, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Louvain (nos 62 à 74).

TABLE DES ARTICLES

62. La recherche des courants stellaires, par M. *M. Alliaume*, p. 9.

63. La mesure de la Terre par la méthode des aires, les déviations de la verticale et l'hypothèse isostatique, par M. *M. Alliaume*, p. 27.

64. Sur les mesures d'égale précision, par M. *M. Alliaume*, p. 59.

65. La relation entre l'approximation et le poids d'une observation, par M. *M. Alliaume*, p. 63.

66. P.-J. Édouard Goedseels, par M. *M. Alliaume*, p. 69.

67. Introduction de l'approximation relative dans la théorie des erreurs d'observation, par M. *M. Alliaume*, p. 77.

68. Note sur la théorie du théodolite, par M. *M. Alliaume*, p. 85.

69, 72, 73. La planète transneptunienne, par M. *M. Alliaume*, pp. 101, 173, 195.

70. Simplifications à la méthode de Gauss pour la détermination des orbites dans le cas d'une planète très éloignée, par M. *M. Alliaume*, p. 125.

71. Esquisse de l'histoire des mathématiques et de l'astronomie en Belgique depuis 1830, par M. *M. Alliaume*, p. 131.

74. Revue annuelle d'Astronomie 1929, par M. *M. Alliaume*, p. 211.

75. Critérium d'existence de la dérivée normale d'un potentiel de surface en un point de la surface active, par M. *Ch. de la Vallée Poussin*, p. 251.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/laboratoire-dastronomie-de-luniverseite-de-louvain_1930_7

N° 62.

La Recherche des courants stellaires

par M. M. Alliaume (1).

1. La méthode présentée ci-dessous pour la recherche des courants stellaires est d'une extrême simplicité théorique. Elle ne fait aucune hypothèse sur la distribution des composantes des mouvements stellaires perpendiculaires à la direction générale du courant. Il semble bien qu'aucun courant ne peut lui échapper. Elle permet de définir un courant stellaire comme *un ensemble d'étoiles ayant des vitesses parallèles, quelle que soit, en grandeur, la distribution des vitesses parmi ces étoiles*, et elle se prête ensuite à *l'étude de cette distribution au sein du courant.*

Il est indifférent, en principe, d'étudier les mouvements stellaires par rapport à n'importe lequel des systèmes de repère pour lesquels les principes de la Mécanique sont vrais. Les axes qui vont être utilisés sont héliocentriques. L'étude des courants stellaires étant faite par rapport à ces axes, il est facile de transposer ses conclusions dans un système d'axes dynamiquement équivalent, et qu'il ne restera plus qu'à définir en ayant égard, par exemple, à la structure générale attribuée à l'univers galactique. Une précision sera proposée à ce sujet dans la dernière partie de cette note.

2. On va étudier le mouvement des étoiles par rapport à des axes pour lesquels les principes de la Mécanique sont vrais. Cette étude ne peut être abordée que dans l'hypothèse que tout mouvement stellaire par rapport à ces axes soit recti-

---

(1) Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique (*Bulletin de la Classe des Sciences*, 2e sér., t. XIV [1928], pp. 428-444).

ligne et uniforme. En particulier, aux petites accélérations près qu'imposent au Soleil les mouvements planétaires (et dont il ne s'agit évidemment pas de s'occuper ici pour le Soleil plus que pour toute autre étoile), les axes héliocentriques équatoriaux stellaires de telle époque sont, dans cette hypothèse, des axes par rapport auxquels les principes de la Mécanique sont vrais : ce sont ces axes que nous adopterons d'abord dans l'étude des mouvements stellaires, les coordonnées polaires d'une étoile étant ainsi l'ascension droite α et la déclinaison δ que donne, pour telle époque, un catalogue déterminé. Soient de plus ρ la distance de cette étoile au Soleil, et (x, y, z) ses coordonnées rectilignes par rapport aux mêmes axes et au même instant.

Après différentiation, les identités

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\alpha \cos\delta, \\ y &= \rho \sin\alpha \cos\delta, \\ z &= \rho \sin\delta \end{aligned}$$

deviennent

$$\begin{aligned} dx &= \cos\alpha \cos\delta\, d\rho - \rho \sin\alpha \cos\delta\, d\alpha - \rho \cos\alpha \sin\delta\, d\delta, \\ dy &= \sin\alpha \cos\delta\, d\rho + \rho \cos\alpha \cos\delta\, d\alpha - \rho \sin\alpha \sin\delta\, d\delta, \\ dz &= \sin\delta\, d\rho + \rho \cos\delta\, d\delta. \end{aligned}$$

Le mouvement de l'étoile étant uniforme, les différentielles qui entrent dans ces égalités peuvent être considérées comme des variations pendant une durée quelconque. En particulier $d\alpha$ et $d\delta$ seront les mouvements propres annuels en ascension droite et en déclinaison fournis par un catalogue de mouvements propres; $d\rho$, dx, dy, dz seront les variations annuelles de la distance et des coordonnées rectilignes.

3. Les vitesses radiales se mesurent d'une manière moins sûre que les déplacements angulaires. Aussi n'utiliserons-nous les équations différentielles ci-dessus que dans des associations algébriques qui en auront fait disparaître $d\rho$.

4. En vue d'une *première partie* de cette étude, éliminons ρ et $d\rho$ entre ces trois équations différentielles. Nous obtenons une équation linéaire et homogène en (dx, dy, dz) :

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$

où les coefficients A, B, C sont des nombres entièrement calculables pour chaque étoile, à partir d'un catalogue de mouvements propres qui ne doit pas renfermer les parallaxes :

$$\begin{aligned} A &= \cos\alpha \sin\delta \cos\delta\, d\alpha - \sin\alpha\, d\delta, \\ B &= \sin\alpha \sin\delta \cos\delta\, d\alpha + \cos\alpha\, d\delta, \\ C &= -\cos^2\delta\, d\alpha. \end{aligned}$$

A chaque étoile correspond une pareille équation. Envisageons l'éventualité de *courants d'étoiles*. Comme l'équation de chaque étoile est homogène en (dx, dy, dz), il nous suffit de dire que, par définition, *plusieurs étoiles appartiennent à un même courant lorsque*, à une approximation qui sera définie au cours des calculs, *les vitesses de ces étoiles sont parallèles, sans être nécessairement égales*. En adoptant cette définition, et si la première partie de cette étude confirme l'existence des courants stellaires, nous réservons pour une deuxième partie la question de la distribution des vitesses au sein d'un même courant.

Parmi les équations

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

relatives à toutes les étoiles utilisées, celles qui correspondent aux étoiles d'un même courant sont, à l'approximation prévue, compatibles en (dx, dy, dz). La compatibilité de ces équations est nécessaire à ce que les étoiles correspondantes appartiennent à un même courant, moyennant une approximation nulle.

Posons

$$u = \frac{dx}{dz}, \qquad v = \frac{dy}{dz};$$

l'équation relative à chaque étoile utilisée devient

$$A\,u + B\,v + C = 0.$$

Par rapport à des axes $\xi\eta$, c'est l'équation tangentielle d'un point, à savoir celui dont les coordonnées ponctuelles sont

$$\xi = \frac{A}{C}, \qquad \eta = \frac{B}{C};$$

nous dirons que c'est, dans le plan $\xi\eta$, *le point représentatif du mouvement propre de l'étoile.*

Pour que diverses étoiles appartiennent à un même courant, moyennant une approximation nulle, *il faut que* les équations linéaires correspondantes en (u, v) soient compatibles, c'est-à-dire que, dans le plan $\xi\eta$, *les points représentatifs de leurs mouvements propres soient en ligne droite.* Dans la réalité l'approximation n'est pas nulle, et si des étoiles appartiennent à un même courant, les points représentatifs de leurs mouvements propres se grouperont dans le voisinage d'une certaine droite, de la même façon que se groupent, sur un diagramme, les points représentatifs d'expériences à un paramètre indépendant, effectuées pour l'étude d'un phénomène dont la loi est, théoriquement ou empiriquement, considérée comme linéaire.

En fonction des lectures dans le catalogue d'étoiles, les coordonnées du point représentatif du mouvement propre d'une étoile sont

$$\xi = -\cos\alpha \operatorname{tg}\delta + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\delta} \cdot \frac{d\delta}{d\alpha},$$

$$\eta = -\sin\alpha \operatorname{tg}\delta - \frac{\cos\alpha}{\cos^2\delta} \cdot \frac{d\delta}{d\alpha}.$$

Pour toutes les étoiles utilisées, tous ces points se groupent, de la manière qui vient d'être dite, *le long d'autant de droites qu'il y a de courants stellaires.* Il suffira d'appliquer la théorie des erreurs à la détermination la plus avantageuse de chacune de ces droites, et d'en déduire les éléments caractéristiques de chacun des courants.

5. Ces droites représentatives de courants stellaires peuvent se déduire d'un autre raisonnement : Les paramètres directeurs

(A, B, C) de toute direction perpendiculaire à celle de la vitesse $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ de l'étoile considérée satisfont à la condition

$$A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} = 0$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l} A\left(\cos\alpha\cos\delta\,\dfrac{d\rho}{\rho} - \sin\alpha\cos\delta\,d\alpha - \cos\alpha\sin\delta\,d\delta\right) \\ + B\left(\sin\alpha\cos\delta\,\dfrac{d\rho}{\rho} + \cos\alpha\cos\delta\,d\alpha - \sin\alpha\sin\delta\,d\delta\right) \\ + C\left(\sin\delta\,\dfrac{d\rho}{\rho} + \cos\delta\,d\delta\right) = 0. \end{array}\right.$$

Nous pouvons leur imposer une condition nouvelle : que ce soit la disparition du terme en $d\rho$,

$$A\cos\alpha\cos\delta + B\sin\alpha\cos\delta + C\sin\delta = 0;$$

de sorte que, dans un plan perpendiculaire à la vitesse, la direction qui vérifie cette condition est perpendiculaire à la direction héliocentrique de l'étoile. La première condition se réduit à

$$\left\{\begin{array}{l} A\,(-\sin\alpha\cos\delta\,d\alpha - \cos\alpha\sin\delta\,d\delta) \\ + B\,(\cos\alpha\cos\delta\,d\alpha - \sin\alpha\sin\delta\,d\delta) \\ + C\cos\delta\,d\delta = 0, \end{array}\right.$$

et les paramètres (A, B, C) qui satisfont à ces deux équations sont bien, nécessairement à un facteur commun près, les nombres (A, B, C) qui ont été calculés ci-dessus en fonction de α, δ, $d\alpha$, $d\delta$.

Pour que toutes les étoiles d'un certain groupe aient des vitesses parallèles, c'est-à-dire appartiennent à un même courant, moyennant une approximation nulle, il faut que les directions (A, B, C) correspondantes soient parallèles à un même plan; pour qu'il en soit ainsi de trois étoiles, pour

lesquelles les notations prennent respectivement des indices 1, 2, 3, il faut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

soit égal à zéro, c'est-à-dire que, dans le plan $\xi\eta$, les points représentatifs

$$\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{A_1}{C_1}, & \xi_2 = \dfrac{A_2}{C_2}, & \xi_3 = \dfrac{A_3}{C_3}, \\ \eta_1 = \dfrac{B_1}{C_1}, & \eta_2 = \dfrac{B_2}{C_2}, & \eta_3 = \dfrac{B_3}{C_3} \end{cases}$$

soient en ligne droite.

6. La direction (A, B, C) est perpendiculaire au plan déterminé par la direction héliocentrique de l'étoile et par la vitesse de celle-ci. Pour que les points représentatifs (ξ, η) des mouvements propres de n étoiles soient en ligne droite, il faut et il suffit que les plans ainsi définis de ces n étoiles se coupent suivant une même droite. C'est ce qui arrivera, en particulier, si toutes les étoiles appartiennent à un même courant.

Pour que les points représentatifs (ξ, η) des mouvements propres de n étoiles soient en ligne droite, il est donc suffisant, mais non nécessaire, que ces étoiles appartiennent à un même courant. Cette distinction ne pourra faire naître aucune difficulté dans la recherche des courants stellaires. En effet, il n'y a évidemment pas lieu d'envisager l'éventualité que l'univers soit, géométriquement et cinématiquement, construit de façon que, pour des groupes importants d'étoiles, de tels plans, *définis au moyen de la position du Soleil*, se coupent à peu près suivant une même droite. Si, dans le plan $\xi\eta$, de nombreux points représentatifs de mouvements stellaires se groupent en une même zone rectiligne, il n'y aura décidément pas d'autre explication admissible que le parallélisme des vitesses des étoiles correspondantes.

7. L'élimination de $d\rho$ et de $d\alpha$, puis celle de $d\rho$ et de $d\delta$ entre les trois premières équations différentielles laissent respectivement

$$\cos\alpha\sin\delta\,dx + \sin\alpha\sin\delta\,dy - \cos\delta\,dz + \rho\,d\delta = 0,$$
$$\sin\alpha\,dx - \cos\alpha\,dy + \rho\cos\delta\,d\alpha = 0;$$

d'où

$$\frac{1}{\cos\delta}\cdot\frac{d\delta}{d\alpha} = \frac{\cos\alpha\sin\delta\,dx + \sin\alpha\sin\delta\,dy - \cos\delta\,dz}{\sin\alpha\,dx - \cos\alpha\,dy}.$$

Ainsi, les coordonnées

$$\xi = -\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\delta}\cdot\frac{d\delta}{d\alpha},$$
$$\eta = -\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta - \frac{\cos\alpha}{\cos^2\delta}\cdot\frac{d\delta}{d\alpha}$$

du point représentatif du mouvement propre de l'étoile (α, δ) s'écrivent de la manière suivante en fonction des coordonnées polaires (α, δ) et des variations (dx, dy, dz) des coordonnées rectangulaires :

$$\xi = \frac{\mathrm{tg}\,\delta\,dy - \sin\alpha\,dz}{\sin\alpha\,dx - \cos\alpha\,dy},$$
$$\eta = \frac{-\mathrm{tg}\,\delta\,dx + \cos\alpha\,dz}{\sin\alpha\,dx - \cos\alpha\,dy}.$$

Nous trouverons l'équation en (ξ, η) de la droite représentative du courant stellaire à laquelle l'étoile appartient en éliminant l'une des coordonnées (α, δ) entre ces deux équations : l'élimination de l'une devra entraîner la disparition de l'autre, pour laisser une équation en (ξ, η, dx, dy, dz). On obtient, comme il était nécessaire,

$$\xi\,dx + \eta\,dy + dz = 0,$$

équation de la droite le long de laquelle se placeraient rigoureusement les points représentatifs des mouvements propres de toutes les étoiles d'un même courant, si toutes ces étoiles avaient des vitesses rigoureusement parallèles.

8. La recherche des courants stellaires (définis indépendamment des grandeurs des vitesses) se fera donc de la manière suivante :

1° Calculer les nombres

$$\xi_i = -\cos\alpha_i \operatorname{tg}\delta_i + \frac{\sin\alpha_i}{\cos^2\delta_i}\cdot\frac{d\delta_i}{d\alpha_i},$$

$$\eta_i = -\sin\alpha_i \operatorname{tg}\delta_i - \frac{\cos\alpha_i}{\cos^2\delta_i}\cdot\frac{d\delta_i}{d\alpha_i}$$

pour chacune des étoiles $(\alpha_i, \delta_i, i = 1, 2, 3, \ldots)$ du catalogue de mouvements propres utilisés.

2° Tracer une figure rapportée à des axes $\xi\eta$ et sur laquelle à chaque étoile (α_i, δ_i) correspondra le point (ξ_i, η_i) ; étudier cette figure pour y distinguer des régions rectilignes où s'accumulent les points marqués.

3° Écrire les équations linéaires et homogènes en (a, b, c)

$$\xi_j a + \eta_j b + c = 0$$

au moyen des coordonnées (ξ_j, η_j) relatives à chacune des étoiles dont les points représentatifs sont ceux d'une première zone rectiligne ainsi distinguée et qui, par hypothèse, appartiennent à un même courant. Appliquer la théorie des erreurs à ce groupe d'équations incompatibles en (a, b, c), pour obtenir les valeurs les plus avantageuses des inconnues. En déduire les valeurs correspondantes de l'ascension droite A et de la déclinaison D de la direction commune aux étoiles du courant par les égalités

$$\frac{\cos A \cos D}{a} = \frac{\sin A \cos D}{b} = \frac{\sin D}{c},$$

et terminer l'application de la théorie des erreurs par le calcul habituel de l'approximation des valeurs trouvées pour les inconnues finales.

4° Effectuer les mêmes calculs à propos de chacune des

autres zones rectilignes de la figure en $\xi\eta$, c'est-à-dire pour chacun des courants stellaires.

Il faut prévoir que des points représentatifs de mouvements propres n'appartiendront, moyennant une approximation raisonnable, à aucune pareille zone rectiligne. Ce seront, en particulier, ceux qui correspondent à des étoiles dont le mouvement héliocentrique est sensiblement nul. Si l'on adoptait des axes de repère liés à l'un des courants qu'on aura découverts, ou bien des axes tels que ceux qui ont été prévus au début de cette note, et pour lesquels l'étude (cinématique et dynamique) du système stellaire serait la plus commode, on dirait que les étoiles perdues pour les calculs qui viennent d'être décrits sont, en particulier, celles qui constituent un courant dont le Soleil fait partie et qui ont, au sein de ce courant, la même vitesse que le Soleil.

9. Il y a lieu de chercher la signification d'un point de l'épure en $\xi\eta$ situé à l'intersection de deux droites représentatives de courants stellaires, c'est-à-dire, pratiquement, l'interprétation des points représentatifs de mouvements propres communs à deux zones rectilignes dont chacune aura été interprétée comme représentative d'un courant.

Un point du plan des $\xi\eta$ est défini par la direction perpendiculaire à la direction héliocentrique de l'étoile et à la direction de sa vitesse. Ainsi c'est un même point (ξ, η) qui correspondra à deux étoiles dont les vitesses sont situées l'une et l'autre dans le plan défini par ces étoiles et le Soleil. L'intersection de deux droites représentatives de courants stellaires peut donc représenter une étoile d'un courant et une étoile de l'autre, les vitesses de ces deux étoiles satisfaisant à la condition qui vient d'être énoncée.

Il résulte encore de ceci que, si toutes les étoiles, y compris le Soleil, appartenaient à un même plan, et constamment, c'est-à-dire moyennant des vitesses dirigées dans ce plan, tous les

points représentatifs de leurs mouvements propres, dans l'épure en $\xi\eta$, coïncideraient. C'est ce qui se retrouve facilement par le calcul.

Soient (α_0, δ_0) l'ascension droite et la déclinaison d'une perpendiculaire au plan de toutes les étoiles. Les conditions énoncées, l'une géométrique, l'autre cinématique, s'expriment, pour toute étoile (α, δ), de la façon suivante :

$$\cos\alpha_0 \cos\delta_0 \cos\alpha \cos\delta + \sin\alpha_0 \cos\delta_0 \sin\alpha \cos\delta + \sin\delta_0 \sin\delta = 0,$$
$$\cos\alpha_0 \cos\delta_0\, dx + \sin\alpha_0 \cos\delta_0\, dy + \sin\delta_0\, dz = 0;$$

d'où

$$\frac{\cos\alpha_0 \cos\delta_0}{\operatorname{tg}\delta\, dy - \sin\alpha\, dz} = \frac{\sin\alpha_0 \cos\delta_0}{-\operatorname{tg}\delta\, dx + \cos\alpha\, dz} = \frac{\sin\delta_0}{\sin\alpha\, dx - \cos\alpha\, dy}.$$

Or

$$\xi = \frac{\operatorname{tg}\delta\, dy - \sin\alpha\, dz}{\sin\alpha\, dx - \cos\alpha\, dy},$$
$$\eta = \frac{-\operatorname{tg}\delta\, dx + \cos\alpha\, dz}{\sin\alpha\, dx - \cos\alpha\, dy};$$

de sorte que

$$\xi = \frac{\operatorname{tg}\delta_0}{\cos\alpha_0}, \qquad \eta = \frac{\operatorname{tg}\delta_0}{\sin\alpha_0},$$

coordonnées indépendantes des nombres $(\alpha, \delta, d\alpha, d\delta)$ propres à une étoile déterminée.

10. On peut maintenant, à propos de chacun des courants découverts, se poser la question de la *distribution des vitesses au sein de ce courant*. Soient A et D l'ascension droite et la déclinaison communes aux directions des vitesses dans le courant étudié, et V la vitesse de l'étoile (α, δ) de ce courant. L'élimination de $d\delta$ et de $d\rho$ entre les trois premières équations différentielles nous a déjà donné l'égalité

$$\sin\alpha \frac{dx}{dt} - \cos\alpha \frac{dy}{dt} + \rho \cos\delta \frac{d\alpha}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire

$$V \sin \alpha \cos A \cos D - V \cos \alpha \sin A \cos D + \rho \cos \delta \frac{d\alpha}{dt} = 0;$$

d'où la formule

$$V = \frac{\rho \cos \delta \frac{d\alpha}{dt}}{\cos D \sin (A - \alpha)}$$

qui répond à la question, pourvu que l'on dispose, cette fois, d'un catalogue qui renferme les parallaxes des étoiles considérées.

Inversement, s'il s'agissait d'un courant où l'on connût les distances de quelques étoiles seulement, on pourrait, à défaut de mieux, faire l'hypothèse de l'égalité des vitesses V pour en déduire *la distance de toute autre étoile du même courant :*

$$\rho = \frac{V \cos D \sin (A - \alpha)}{\cos \delta \frac{d\alpha}{dt}},$$

et ceci équivaut à la méthode de Boss pour la détermination des parallaxes stellaires. Dans un même courant (A, D), pour une étoile déterminée (α, δ, $d\alpha$), la distance héliocentrique ρ est proportionnelle à V, et le rapport $\frac{\rho}{V}$ seul peut être calculé indépendamment de toute hypothèse. Si, dans le courant étudié, la dispersion des vitesses V est trop grande pour qu'on puisse l'attribuer aux erreurs d'observation, on devra calculer pour chaque étoile deux valeurs de ρ, respectivement avec la plus grande et la plus petite valeur de V trouvées dans le même courant. Ce seront deux valeurs extrêmes de ρ, non pas d'une manière absolue, mais eu égard à ce qu'on sait du courant stellaire auquel appartient l'astre considéré.

11. En ce qui concerne les étoiles dont la distance est connue, une *étude géométrique de la distribution des vitesses* dans le courant sera beaucoup plus rapide et plus suggestive.

Reprenons l'équation en $\frac{d\alpha}{dt}$ qui vient d'être utilisée :

$$\sin\alpha\,\frac{dx}{dt} - \cos\alpha\,\frac{dy}{dt} + \rho\cos\delta\,\frac{d\alpha}{dt} = 0;$$

posons

$$u' = \frac{dx}{dt}, \qquad v' = \frac{dy}{dt},$$

ce qui en fait

$$\sin\alpha\,.\,u' - \cos\alpha\,.\,v' + \rho\cos\delta\,\frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Il y a une pareille égalité pour chaque étoile du courant, et cette égalité est, dans une nouvelle épure, par rapport à des axes $\xi'\eta'$, l'équation tangentielle d'un point, à savoir celui qui a pour coordonnées ponctuelles

$$\xi' = \frac{\sin\alpha}{\rho\cos\delta\,\dfrac{d\alpha}{dt}}, \qquad \eta' = -\frac{\cos\alpha}{\rho\cos\delta\,\dfrac{d\alpha}{dt}}.$$

Supposons que trois de ces points soient en ligne droite, points correspondant aux étoiles $(\rho_1, \alpha_1, \delta_1)$, $(\rho_2, \alpha_2, \delta_2)$, $(\rho_3, \alpha_3, \delta_3)$ d'un même courant (A, D). C'est que les trois équations en (u', v') sont compatibles. Exprimons la condition de compatibilité de ces trois équations en remplaçant dans chacune d'elles le terme $\rho\cos\delta\,\frac{d\alpha}{dt}$ par sa valeur V cos D cos (A—α). Pourvu que D ne soit pas égal à $\pm 90°$, on voit ainsi qu'à l'alignement des trois points (ξ', η') correspond la relation suivante entre les vitesses V_1, V_2, V_3 des trois étoiles :

$$\begin{vmatrix} V_1\sin(A-\alpha_1) & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \\ V_2\sin(A-\alpha_2) & \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \\ V_3\sin(A-\alpha_3) & \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

La distribution des étoiles en ascension droite, précisément telle que ce déterminant serait nul pour des valeurs inégales de V_1, V_2, V_3, ne doit évidemment pas être envisagée; et pour

que les équations en (u', v') soient compatibles, il faut et il suffit généralement (les ascensions droites étant quelconques) que les vitesses des étoiles, déjà parallèles par hypothèse, soient égales.

Ainsi, *pour que des étoiles d'un même courant aient la même vitesse, il faut et il suffit généralement que, dans la nouvelle épure en $\xi' \eta'$, les points correspondant à ces étoiles soient en ligne droite.* — L'équation ponctuelle de cette droite résulte de l'élimination de α entre les égalités en (ξ', η') après que $\rho \cos \delta \frac{du}{dt}$ y a été remplacé par sa valeur $V \cos D \sin (A - \alpha)$:

$$\xi' \cos A + \eta' \sin A + \frac{1}{V \cos D} = 0.$$

Dans l'épure en (ξ', η') relative à tel courant stellaire (A, D), on tracera donc à l'avance les droites parallèles, cotées V_k,

$$\xi' \cos A + \eta' \sin A + \frac{1}{V_k \cos D} = 0,$$

relatives à des vitesses V_k convenablement choisies et aussi rapprochées que l'on veut : une étoile $(\rho, \alpha, \delta, d\alpha)$ du courant (A, D) a une vitesse V comprise entre les cotes que portent les deux droites entre lesquelles tombe le point correspondant (ξ', η'), et une interpolation à vue précisera cette évaluation. L'application des méthodes de la statistique permettra de répondre à la question générale de la distribution des vitesses dans le courant, et l'on aura facilité cette étude en donnant aux cotes V_k des valeurs constituant les termes d'une progression arithmétique. Enfin, l'observation d'anomalies considérables permettra d'écarter des étoiles que l'épure en $\xi \eta$ aurait pu faire attribuer indûment au courant étudié. Ces étoiles pourront être : 1° des étoiles ayant un déplacement très lent par rapport aux axes héliocentriques, c'est-à-dire appartenant au même courant que le Soleil, avec à peu près la même vitesse que celui-ci ; 2° des étoiles dont

les points représentatifs (ξ, η) de la première épure étaient voisins du point d'intersection des droites figuratives de deux courants.

12. Les calculs décrits ci-dessus menés à bonne fin, nous connaissons les coordonnées et les vitesses d'un grand nombre d'étoiles par rapport à des axes héliocentriques pour lesquels les principes de la Mécanique sont vrais. Ce seront les coordonnées et les vitesses des étoiles voisines du Soleil, mais l'ensemble de ces étoiles constituera une portion de l'univers galactique beaucoup plus considérable que celle qui renferme les étoiles assez voisines du Soleil pour que la méthode trigonométrique se prête à la mesure de leurs distances. Elle s'étendra en effet à toutes les étoiles dont l'étude des mouvements propres, indépendamment des distances, a permis de dire qu'elles appartiennent à tel ou tel courant, pourvu que, dans ce courant, pour les étoiles dont la distance est connue, l'étude de la distribution des vitesses n'ait pas fait apparaître une trop grande dispersion : une hypothèse simple sur la distribution des vitesses, telle que leur égalité, aura permis l'évaluation des distances de toutes ces étoiles.

On pourra demander les éléments des courants stellaires par rapport à des axes de repère d'un intérêt plus général que celui des axes héliocentriques adoptés jusqu'ici, et il est naturel d'adopter des axes dont la définition soit liée à la structure attribuée à l'univers galactique. On n'attachera cependant pas grande importance à cette liaison. En effet, si étendue qu'elle vienne d'être dite, mais limitée aux étoiles dont les mouvements propres en ascension droite et en déclinaison peuvent être mesurés avec quelque précision, la région stellaire atteinte dans cette étude n'est encore qu'une faible portion de l'univers galactique. De plus (mais non indépendamment de la remarque précédente), l'étude des mouvements stellaires n'aurait pas pu être abordée si l'on n'avait pas fait l'hypothèse de mouvements

rectilignes et uniformes par rapport aux axes de la Mécanique.

En principe, l'orientation des axes nouveaux, que nous appellerons XYZ, est donc quelconque, pourvu qu'ils aient des directions constantes dans le système héliocentrique équatorial de telle époque. A défaut de raison qui suggère un autre choix, on décidera que les nouveaux axes définiront un système de coordonnées galactiques. Appelons (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) les cosinus directeurs invariables des axes équatoriaux de l'époque du catalogue stellaire, par rapport aux axes des XYZ.

De même, en principe, le choix de l'origine de ces axes est arbitraire : soient (X_0, Y_0, Z_0) les coordonnées du Soleil à tel instant par rapport à ces axes. Ce qui nous intéresse, c'est la direction et la grandeur de la vitesse censée constante qu'il convient d'attribuer à l'origine des axes nouveaux, par rapport aux axes héliocentriques, pour qu'il y ait un sens aussi simple et aussi naturel que possible à dire que, par rapport à ces axes nouveaux, le Soleil possède une vitesse de tel nombre de kilomètres par seconde.

Soient (ρ, α, δ) les coordonnées polaires d'une étoile par rapport aux axes héliocentriques (x, y, z) adoptés jusqu'ici, (V, A, D) la grandeur et les coordonnées polaires de la vitesse de cette étoile par rapport aux mêmes axes, et $(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{D}_0)$ la grandeur et les coordonnées polaires de la vitesse du Soleil par rapport aux axes nouveaux.

Pour chaque étoile, nous avons les égalités

$$\left\{\begin{aligned} X &= X_0 + a_1\rho\cos\alpha\cos\delta + a_2\rho\sin\alpha\cos\delta + a_3\rho\sin\delta,\\ Y &= Y_0 + b_1\rho\cos\alpha\cos\delta + b_2\rho\sin\alpha\cos\delta + b_3\rho\sin\delta,\\ Z &= Z_0 + c_1\rho\cos\alpha\cos\delta + c_2\rho\sin\alpha\cos\delta + c_3\rho\sin\delta, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \mathfrak{V}_0\cos\mathfrak{A}_0\cos\mathfrak{D}_0 + a_1V\cos A\cos D + a_2V\sin A\cos D + a_3V\sin D,\\ \frac{dY}{dt} &= \mathfrak{V}_0\sin\mathfrak{A}_0\cos\mathfrak{D}_0 + b_1V\cos A\cos D + b_2V\sin A\cos D + b_3V\sin D,\\ \frac{dZ}{dt} &= \mathfrak{V}_0\sin\mathfrak{D}_0 + c_1V\cos A\cos D + c_2V\sin A\cos D + c_3V\sin D. \end{aligned}\right.$$

La condition la plus simple et la plus naturelle à imposer aux axes nouveaux est *que la somme algébrique des projections des vitesses de toutes les étoiles sur chacun d'eux soit égale à zéro.*

Si $(n+p)$ est le nombre des étoiles considérées et p le nombre des étoiles reconnues comme sensiblement immobiles dans les axes héliocentriques, cette condition s'exprime par les égalités

$$\left\{\begin{aligned}
&(n+p+1)\,\mathfrak{V}_0 \cos \mathfrak{A}_0 \cos \mathfrak{D}_0 + a_1 \sum_n \mathrm{V} \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{D} \\
&\qquad + a_2 \sum_n \mathrm{V} \sin \mathrm{A} \cos \mathrm{D} + a_3 \sum_n \mathrm{V} \sin \mathrm{D} = 0, \\
&(n+p+1)\,\mathfrak{V}_0 \sin \mathfrak{A}_0 \cos \mathfrak{D}_0 + b_1 \sum_n \mathrm{V} \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{D} \\
&\qquad + b_2 \sum_n \mathrm{V} \sin \mathrm{A} \cos \mathrm{D} + b_3 \sum_n \mathrm{V} \sin \mathrm{D} = 0, \\
&(n+p+1)\,\mathfrak{V}_0 \sin \mathfrak{D}_0 + c_1 \sum_n \mathrm{V} \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{D} \\
&\qquad + c_2 \sum_n \mathrm{V} \sin \mathrm{A} \cos \mathrm{D} + c_3 \sum_n \mathrm{V} \sin \mathrm{D} = 0,
\end{aligned}\right.$$

qui constituent un système de trois équations aux inconnues $(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{D}_0)$.

Par exemple, si, p étant nul, les n étoiles étudiées se distribuent, respectivement au nombre de n' et de n'', en deux courants $(\mathrm{V}', \mathrm{A}', \mathrm{D}')$ et $(\mathrm{V}'', \mathrm{A}'', \mathrm{D}'')$, dans chacun desquels toute étoile a la même vitesse, ces égalités s'écrivent de façon que, en particulier,

$$\mathfrak{V}_0^2 = \frac{n'^2 \mathrm{V}'^2 + n''^2 \mathrm{V}''^2 + 2n'n'' \mathrm{V}'\mathrm{V}'' \cos \varphi}{(n'+n''+1)^2},$$

où φ est l'angle des directions héliocentriques des deux courants, formule à laquelle correspond d'autant mieux la construction faite par M. Eddington (dans l'hypothèse $n'/n'' = 2/3$) que le nombre des étoiles considérées est plus élevé.

En possession de $\mathfrak{V}_0, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{D}_0$, on calculera la vitesse $\mathfrak{V}$ de

chaque étoile au sein de chaque courant de direction ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$) par rapport aux axes définitifs, en égalant respectivement, pour chaque étoile, $\mathfrak{V}\cos\mathfrak{A}\cos\mathfrak{D}$, $\mathfrak{V}\sin\mathfrak{A}\cos\mathfrak{D}$, $\mathfrak{V}\sin\mathfrak{D}$, aux seconds membres, maintenant entièrement numériques des égalités ci-dessus en $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$. On reconnaîtra ici le courant auquel appartiennent le Soleil et les étoiles dont le mouvement héliocentrique est sensiblement nul : c'est le courant héliocentrique (A, D) où les vitesses héliocentrique et nouvelle, V et $\mathfrak{V}$, de toute étoile satisfont aux égalités

$$\begin{cases} (\mathfrak{V}_0 - \mathfrak{V})\cos\mathfrak{A}_0\cos\mathfrak{D}_0 = a_1 V\cos A\cos D + a_2 V\sin A\cos D + a_3 V\sin D, \\ (\mathfrak{V}_0 - \mathfrak{V})\sin\mathfrak{A}_0\cos\mathfrak{D}_0 = b_1 V\cos A\cos D + b_2 V\sin A\cos D + b_3 V\sin D, \\ (\mathfrak{V}_0 - \mathfrak{V})\sin\mathfrak{D}_0 \qquad\quad = c_1 V\cos A\cos D + c_2 V\sin A\cos D + c_3 V\sin D; \end{cases}$$

de sorte que, parmi les courants découverts dans le système héliocentrique, le courant auquel appartient le Soleil est celui dans lequel une étoile quelconque, dont la vitesse héliocentrique est V, a, par rapport aux axes définitifs, et moyennant l'approximation admise dès le début de cette étude, une vitesse $\mathfrak{V}$ égale à $(\mathfrak{V}_0 \pm V)$.

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.

La mesure de la Terre par la méthode des aires, les déviations de la verticale et l'hypothèse isostatique

par M. M. Alliaume (1).

Le 28 avril, j'ai eu l'honneur de faire, sous ce titre, la conférence à la réunion mensuelle de la *Société belge d'Astronomie.* A la demande de M. E. Lagrange, président du Comité de rédaction de *Ciel et Terre,* je vais écrire à peu près ce que j'y ai dit; j'intercalerai dans le texte, pour être imprimées en petits caractères, des notes documentaires et des réflexions que le peu de temps dont je disposais ne m'a pas permis d'introduire dans la conférence. Les travaux géodésiques qui vont être décrits ont été exécutés aux Etats-Unis, principalement de 1900 à 1910. Leur exposé devra être suivi d'une deuxième étude qui pourrait être intitulée: *L'exploration dynamique du géoïde et la mesure de la Terre par les anomalies de la pesanteur;* il y serait question de travaux plus récents, faisant suite aux premiers, et étendus à une plus grande partie de la surface terrestre.

Sommaire. — 1. Surfaces de niveau et géoïde. — 2. Géoïde sphérique, géoïde ellipsoïdal de révolution, méthode des arcs. — 3. Ellipsoïde de référence. — 4. Déviations de la verticale. — 5. Déviation topographique. — 6. Isostasie, anomalies de la pesanteur. — 7. Déviation de compensation. — 8. Equations d'observations. — 9. Profondeur de compensation. — 10. Résultats.

On trouvera la *bibliographie* de la question à la fin de l'excellente notice publiée par le colonel G. Perrier dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes* pour 1926: *Les raisons géodésiques de l'isostasie terrestre.* Les deux principaux ouvrages sont les suivants: J.-F. Hayford, *The figure of the Earth and isostasy from measurements in the United States,* et, même auteur, *Supplementary investigation in 1909 of the figure of the Earth and isostasy,* l'un et l'autre à Washington, Coast and Geodetic Survey, Government printing Office resp. 1909 et 1910.

*
**

1. — Lorsqu'on parle de la mesure de la Terre, quelle est la surface dont on demande la forme et la grandeur? Ce n'est évi-

(1) Ciel et Terre, t. 44 (1928), pp. 256 à 264, 289 à 300 et 337 à 346.

demment pas la surface du sol, avec toutes ses indéfinissables irrégularités. C'est une surface dont la définition suppose celle des surfaces de niveau.

Par chaque point voisin de la surface du sol passe une droite bien déterminée, sensiblement invariable par rapport au sol, à savoir la verticale de ce point, matérialisée par le fil à plomb dans sa position d'équilibre. Une surface de niveau est une surface perpendiculaire à la verticale de chacun de ses points. C'est à une surface de niveau qu'appartient la surface libre d'une eau tranquille.

Il existe une infinité de surfaces de niveau, car il en passe une par chaque point; et il en existe une infinité simple, c'est-à-dire que parmi les surfaces de niveau, infiniment nombreuses, il y en a une et une seule qui satisfasse à une condition simple, telle que l'obligation de passer par un point déterminé. Ainsi, par tout point voisin de la surface du sol, passe une surface de niveau et une seule.

Si la surface de la mer était en équilibre, si on pouvait y éteindre un instant les mouvements de la houle et des vagues, sa surface libre serait une surface de niveau. Parmi les surfaces de niveau, on va chercher à considérer, en particulier, celle suivant laquelle se mettrait en équilibre, comme il vient d'être dit, la surface des océans. Parce que cet équilibre est une conception inapplicable, la définition de cette surface de niveau particulière renferme nécessairement quelque chose d'arbitraire. Elle est définie par son passage en un point matériellement déterminé et choisi, pour autant que ceci puisse être imposé, de manière à appartenir à la surface de la mer supposée en équilibre. Pratiquement, le choix de ce point se fait, dans un port ou le long de la côte, après une observation prolongée des médimarémètres, au niveau moyen des marées basses. La surface de niveau particulière définie par son passage en ce point, et à laquelle on décide de repérer les autres, porte le nom de *géoïde*.

En résumé, le géoïde est, parmi les surfaces de niveau, celle qui passe par un point déterminé, arbitraire en principe, et choisi pratiquement de manière à appartenir, autant que possible, à la surface de la mer censée en équilibre. On voit qu'il y a loin de cette définition à celle que l'on rencontre souvent dans

les livres: la surface de la mer prolongée par la pensée sous les îles et sous les continents.

Le géoïde défini pour la construction de la carte de Belgique (carte de l'état-major) passe par tel point du port d'Ostende, à savoir un point du bajoyer est de l'écluse nord du bassin du Commerce: le point situé à 6,2835 m. en dessous de la tablette extrémité nord de cet ouvrage d'art.

*
**

2. — Le géoïde défini, il s'agit d'énoncer le problème de la mesure de sa forme et de sa grandeur. Ce problème ne prend l'aspect géométrique, c'est-à-dire n'est abordable, que lorsqu'on fait une hypothèse sur la nature de cette surface. En particulier, le problème doit se terminer par un tableau de valeurs numériques attribuées à un nombre fixe d'inconnues: ces inconnues devront avoir pour signification géométrique celles de paramètres dont les valeurs numériques particularisent une surface déterminée parmi toutes les surfaces appartenant à une même catégorie géométrique.

L'hypothèse la plus simple qui ait été faite, depuis le début des temps historiques, sur la forme de la surface théorique de la Terre, est celle d'une surface sphérique, et cette hypothèse s'est montrée assez voisine de la réalité pour pouvoir être maintenue pendant extrêmement longtemps, jusqu'il y a deux ou trois siècles.

Dans cette hypothèse le problème ne comporte qu'une inconnue, le rayon de la Terre. Qu'on mesure un arc de méridien, et l'angle des verticales aux deux extrémités de cet arc, c'est-à-dire la différence des latitudes de ces extrémités: pour une même valeur de cette différence la longueur de l'arc est d'autant plus grande que le rayon demandé est plus grand, et du rapprochement de ces deux mesures résulte immédiatement la longueur du rayon.

Si les latitudes sont (φ_1, φ_2), en degrés, et la longueur de l'arc s, le rayon de la sphère est $R = 180\ s : \pi\ (\varphi_1 - \varphi_2)$. L'opération mérite d'autant plus de confiance que l'arc mesuré est plus long. Mais l'hypothèse sphérique est-elle acceptable? A l'approxima-

tion imposée par les erreurs inévitables d'observation, tous les arcs mesurés vont-ils fournir la même réponse?

En 1735, une expédition est organisée par l'Académie des Sciences de Paris pour la mesure d'un arc de méridien dans le voisinage de l'équateur, le long de la côte orientale du Pacifique: l'arc du Pérou. Le rayon correspondant de la Terre est de 3.250.740 toises.

En 1802, une nouvelle expédition française mesure un arc de méridien dans les régions septentrionales, vers le 66e parallèle: c'est l'arc de Suède, auquel correspond un rayon terrestre de 3.276.870 toises.

Cette incompatibilité peut-elle être endossée aux erreurs d'observation? Cette différence de 26.000 toises peut-elle être attribuée aux progrès de la Géodésie pendant les 70 ans qui se sont écoulés de l'une à l'autre des opérations? Toutes discussions faites, les réponses à ces deux questions doivent être négatives. La vérité est que l'hypothèse du géoïde sphérique est une hypothèse trop simple, à laquelle il est temps de renoncer. Que va-t-on mettre à la place?

L'hypothèse immédiatement moins simple est celle d'*un ellipsoïde de révolution* autour de l'axe de rotation de la Terre, et, cette hypothèse adoptée, c'est l'ellipsoïde aplati, et non l'ellipsoïde allongé, qui doit être choisi, pour rendre compte d'un rayon trouvé (dans l'hypothèse d'une Terre sphérique) plus grand par un arc mesuré dans le voisinage du pôle que par un arc mesuré dans la région équatoriale.

Le géoïde ellipsoïdal de révolution aplati est une hypothèse à laquelle on s'arrête complaisamment pour un autre motif. Si fallacieuses que puissent être de pareilles raisons, ce motif est d'*ordre cosmogonique*. On se représente la Terre encore à l'état fluide, et on sait que l'ellipsoïde de révolution aplati est la plus simple des surfaces d'équilibre possibles pour un fluide homogène dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton et qui est animé d'un mouvement de rotation uniforme (*Note A*).

Pendant cet équilibre relatif, dit-on, le refroidissement et la solidification ont débuté par l'extérieur, et la surface théorique qu'on a appelée géoïde ne peut guère être éloignée de la surface libre primitive.

Les inconnues sont maintenant au nombre de deux, tels le demi-grand axe a et le demi-petit axe b de l'ellipse qui, par sa rotation autour du petit-axe, engendre l'ellipsoïde de révolution. Les géodésiens ont préféré prendre pour inconnues, outre le demi-grand axe a, l'aplatissement α défini par le rapport $\alpha = \frac{a - b}{a}$; il y a évidemment équivalence, et la connaissance d'un système d'inconnues entraîne la connaissance de l'autre.

Note A. — La Mécanique se pose le problème suivant: on donne une masse déterminée d'un fluide homogène incompressible dont les particules s'attirent conformément à la loi de Newton et animée d'une rotation d'ensemble uniforme autour d'un droite fixe; on demande la figure de la surface libre. Mais elle est impuissante à le résoudre. C'est que la surface libre est une surface d'égale pression; l'équation générale de ces surfaces s'écrit au moyen du potentiel, et le potentiel ne peut être calculé que pour une configuration d'équilibre déterminée de la masse. On doit donc se contenter de répondre à la question suivante: pour telle densité et telle vitesse de rotation, la surface libre peut-elle appartenir à tel type géométrique? Par exemple, cette surface peut-elle être un ellipsoïde de révolution (nécessairement aplati)? La réponse est affirmative pourvu que, eu égard à la densité, la vitesse de rotation ne dépasse pas telle limite connue numériquement. Lorsque cette condition est vérifiée, il existe même deux ellipsoïdes de révolution possibles: ce sont les ellipsoïdes de Mac Laurin. L'application à la masse qu'a dû constituer la Terre à l'état fluide, avec la densité moyenne 5,5, donne $\frac{1}{231}$ pour l'aplatissement de l'ellipsoïde de révolution le moins aplati: la Terre ne peut être traitée comme due à la solidification d'un fluide homogène.

La surface libre peut-elle être un ellipsoïde non de révolution? La réponse est encore affirmative, moyennant une condition limite imposée à la vitesse et à la densité, condition plus restrictive que celle à laquelle est soumis l'ellipsoïde de révolution: cet ellipsoïde d'équilibre non de révolution s'appelle un ellipsoïde de Jacobi.

Les autres figures d'équilibre que l'on connaît sont infiniment voisines des ellipsoïdes de Mac Laurin et de Jacobi, ce qui signifie ceci: elles se déduisent de ces ellipsoïdes par des déformations qu'expriment des variations dont les carrés sont considérés comme négligeables. Il y a en particulier la célèbre surface piriforme de Poincaré, dont on a tant discuté la stabilité, pour conclure à son instabilité.

La Géométrie résout le problème suivant: on propose un ellipsoïde de révolution par son demi-grand axe a et son aplatissement α; on propose aussi une ligne à la surface de cet ellipsoïde,

ligne déterminée par la relation, dite équation de cette ligne, qui existe constamment entre les coordonnées, longitude et latitude, de chacun de ses points, et par les valeurs numériques des coordonnées de ses extrémités; on demande la longueur s de cette ligne.

Rendons nous compte de la forme du résultat. C'est une égalité

$$s = f\ [a,\ \alpha,\ldots\ (\lambda_1,\ \lambda_2)\ \text{ou}\ (\varphi_1,\ \varphi_2)]$$

dont le premier membre est le symbole s par lequel on a représenté l'inconnue finale, et dont le second membre s'écrit entièrement au moyen des données du problème: le demi-grand axe et l'aplatissement, les paramètres qui entraient dans l'équation de la ligne proposée, enfin, soit les longitudes $(\lambda_1,\ \lambda_2)$, soit les latitudes $(\varphi_1,\ \varphi_2)$ des extrémités de cette ligne.

Le géomètre a fourni au géodésien l'égalité ci-dessus. Le géodésien peut l'appliquer à la résolution du problème inverse: les éléments de grandeur de l'ellipsoïde de révolution sont inconnus; on connaît la longueur s d'une ligne définie sur sa surface, ainsi que les coordonnées des extrémités de cette ligne. Ce sont maintenant la lettre s, les lettres figurées par les points de suspension, et les symboles $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ ou $(\varphi_1,\ \varphi_2)$ qui sont remplacés par des valeurs numériques, dans l'égalité ci-dessus.

Cette égalité est devenue une équation à deux inconnues: le demi-grand axe a et l'aplatissement α du géoïde ellipsoïdal de révolution. Ainsi, la mesure d'un arc défini à la surface de la Terre et celle des coordonnées de ses extrémités suffisent à ce qu'on puisse écrire une équation entre les deux inconnues finales du problème géodésique actuel.

Une équation à deux inconnues ne permet pas la détermination de celles-ci. On va mesurer un deuxième arc à la surface de la Terre, avec les coordonnées de ses extrémités, et en tirer une deuxième équation entre les deux mêmes inconnues. On se trouve ainsi en présence d'un système de deux équations à deux inconnues, qu'il ne reste plus qu'à traiter par les méthodes habituelles de l'Algèbre.

Mais, précisément, ce point de vue de l'algébriste théoricien n'est pas celui où il faut se placer ici. Ce serait fermer les yeux sur les erreurs inévitables d'observation; ce serait oublier le caractère hypothétique de l'assimilation du géoïde à un ellip-

soïde de révolution. Aussi multiplie-t-on les mesures d'arcs, en fait-on, par exemple, dix-huit nouvelles, de manière à écrire un système de vingt équations à deux inconnues; ces équations ne sont pas compatibles: les valeurs des inconnues tirées de deux d'entre elles ne satisfont pas aux autres, et il n'existe pas de couple de valeurs numériques des deux inconnues satisfaisant à la fois à toutes les équations.

Ce n'est pas à l'Algèbre théorique qu'il faut s'adresesr pour la résolution de ce système d'équations surabondantes; c'est à la *Théorie des erreurs d'observation.* On pourra estimer que l'on se trouve dans les conditions qui rendent légitime l'application de la *méthode des moindres carrés,* et on en tirera les valeurs les plus probables des inconnues finales.

Telles sont les opérations que, pendant cent cinquante ans, on a effectuées à la surface de la Terre, en un réseau de plus en plus serré. On a naturellement pu se contenter de cas particuliers simples du problème général. Plutôt que quelque ligne compliquée de la surface terrestre, on a considéré, parfois, des *arcs de parallèles,* dont l'équation exprime que la latitude y a telle grandeur constante et dont les extrémités sont définies par les valeurs numériques de leurs longitudes, généralement des *arcs de méridiens,* dont l'équation exprime que la longitude y a telle grandeur constante et dont les extrémités sont définies par les valeurs numériques de leurs latitudes. Voici la méridienne de France, de Dunkerque à Barcelone, prolongée, au nord, par delà la Manche, jusqu'à l'extrémité de l'Ecosse, et au sud, posée un instant sur les Baléares, et par delà la Méditerranée, jusqu'au seuil du Sahara.

On sait que les longueurs de ces grands arcs ne se mesurent pas directement, mais résultent des opérations et des calculs de la *triangulation.* De part et d'autre de l'arc proposé, des stations sont préparées, de chacune desquelles les stations voisines peuvent être visées au théodolite. La région traversée par l'arc proposé est ainsi couverte d'une chaîne de triangles dont on connaît tous les angles (en projection horizontale), ainsi que l'azimut de l'un des côtés. Il suffit de mesurer directement un côté d'un de ces triangles, choisi dans un site favorable, pour en déduire par le calcul les longueurs de tous les côtés: c'est la mesure de la

base. Toutes ces opérations doivent être ramenées à ce qu'elles auraient été si on avait pu les effectuer sur le géoïde. Enfin, on calcule les segments d'arc proposé appartenant à chacun de ces triangles, d'où la somme de ces segments, c'est-à-dire l'arc lui-même (*note B*).

Les calculs englobant toutes les mesures, les valeurs les plus avantageuses des éléments géoïdaux varient au fur et à mesure que de nouvelles opérations s'effectuent: le géoïde le plus avantageux en 1900 n'est pas celui de 1850, et la réputation de la science géodésique n'a pas à pâtir de ce que divers calculateurs, échelonnés sur deux tiers de siècle, ont obtenu des résultats différents. Principalement :

Bessel en 1841	$a = 6.377{,}397$ m.	$\alpha = \frac{1}{299{,}2}$
Clarke en 1866	6.378.206	$\frac{1}{295{,}0}$
Clarke en 1880	6.378.249	$\frac{1}{293{,}5}$
Helmert en 1907	6.378.140	$\frac{1}{298{,}3}$

Note B. — On vient de citer l'arc de méridien anglo-franco-espagnol, qui s'étend sur une différence de latitude de 27°2' de Sexavord (Ecosse) à Laghouat (Algérie). L'arc russo-scandinave a une amplitude de 25°20', à la longitude de Dorpat, du voisinage du Cap Nord à la côte bessarabienne de la mer Noire. En Afrique australe, trois grands arcs ont été mesurés: celui du 19e méridien (est de Greenwich), dans la colonie du Cap, du lac Ngami à la côte septentrionale, avec une amplitude de 12°25'; celui du 26e méridien, dans la colonie du Cap, du voisinage de Pretoria à la côte septentrionale, avec une amplitude de 8°37'; celui du 30e méridien, dans la Rhodésie et la colonie du Cap, du sud du lac Tanganika au voisinage de Durban, avec une amplitude de 21°36'. Deux arcs ont été mesurés dans l'Hindoustan, sur les méridiens de 75° et 77° est de Greenwich, avec des amplitudes de 19°10' et 21°22'. L'arc principal mesuré en Amérique est celui du 98e méridien ouest de Greenwich, méridien moyen des Etats-Unis, de la frontière canadienne à la frontière mexicaine, avec un développement de 23°.

*
**

3. — En présence de la divergence de ces résultats, on a parlé de renoncer à toute hypothèse à priori sur le géoïde, et d'étudier

celui-ci localement, point par point, par rapport à une surface conventionnelle de repère qui aurait été choisie le plus avantageusement possible. Tel aurait été un *ellipsoïde de référence*, ellipsoïde de révolution dont les éléments de grandeur se fussent exprimés par des nombres relativement simples, comme un rayon équatorial $a = 6{,}375{,}000$ m. et $\alpha = \frac{1}{300}$. C'est ce qu'ont fait, dans leurs travaux récents, mais dans un but un peu différent, les géodésiens du *Coast and Geodetic Survey* des Etats-Unis. La surface introduite par ces géodésiens est un ellipsoïde de révolution solidaire de la Terre, défini de la façon suivante:

1) Quant à sa forme et à sa grandeur, il a le demi-grand axe et l'aplatissement du géoïde ellipsoïdal de Clarke de 1866;

2) Quant à sa localisation par rapport à la Terre, voici de quelle manière elle est déterminée.

Vers le centre des Etats-Unis, dans le Kansas, se trouve le point fondamental O des opérations géodésiques qui vont être décrites: c'est *Meades Ranch*, dont les coordonnées sont (longitude λ ouest de Greenwich et latitude φ).

$$\lambda = 98°32'30'',506 \quad , \quad \varphi = 39°13'26'',686.$$

Soit O' la projection géoïdale du point O, intersection du géoïde et de la verticale de ce point. L'ellipsoïde de référence est lié à la Terre de façon que:

a) il passe par le point O';

b) il soit tangent au géoïde au point O': en ce point la verticale et la normale à l'ellipsoïde de référence sont confondues;

c) son axe de révolution soit parallèle à l'axe de rotation de la Terre.

La Géométrie montre que ces trois conditions sont suffisantes à la localisation demandée. La condition *c* s'exprime pratiquement par la valeur numérique de l'angle que fait, avec le méridien du point O, un plan lié au sol et passant par la verticale de ce point. Ce plan vertical a été défini par le point dit *Waldo*, et la condition *c* est réalisée au mieux par l'azimut Meades Ranch-Waldo égal à 75°28'14'',52; il s'agit d'un azimut mesuré à partir du sud, positivement vers l'ouest.

L'étude du géoïde par rapport à la surface de référence peut se faire de deux manières :

1) par les déviations de la verticale;

2) par les anomalies de la pesanteur.

C'est sur les déviations de la verticale que repose la *méthode des aires* dont il va être question dans la suite de cet article.

4. Au point origine O la perpendiculaire à l'ellipsoïde de référence se confond avec la verticale OO'. Considérons une autre station quelconque A, reliée à la station origine par une triangulation. Cette triangulation comporte une mesure de base et les mesures d'un certain nombre d'angles. Parmi ces angles se trouve l'azimut d'une ligne issue du point O et déterminée par un autre sommet du réseau. Le point origine étant Meades Ranch, cet azimut aura été celui de Meades Ranch-Waldo. Pour être mises en œuvre dans les calculs, toutes ces mesures doivent être réduites à une surface déterminée. Que cette surface soit l'ellipsoïde de référence. Les calculs en question ont alors pour objet de résoudre le problème suivant: eu égard à toutes les mesures qui viennent d'être dites, on demande l'orientation, par rapport aux axes géographiques, des normales à l'ellipsoïde de référence passant par les sommets du réseau de triangulation. Demander l'orientation de cette normale au point A, c'est demander la longitude et la latitude de cette perpendiculaire à l'ellipsoïde de référence. Mais cette longitude et cette latitude ne sont pas la longitude et la latitude du point A: en particulier la latitude de la normale à l'ellipsoïde de révolution au point A est l'angle que fait cette droite avec l'équateur, tandis que la latitude du point A est l'angle que fait avec l'équateur la verticale du point A. On voit le danger d'une confusion. Evitons celle-ci en précisant les dénominations (fig. 1). Le plan xy étant celui de l'équateur, z l'axe de rotation de la Terre orienté vers le nord et le plan xz celui du méridien initial, rappelons que les coordonnées polaires

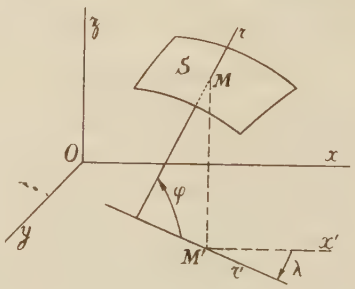


Fig. 1.

d'une droite r (par rapport aux axes géographiques $x\ y\ z$) sont l'angle λ que fait la projection équatoriale r' de cette droite avec le méridien initial et l'angle φ que fait cette droite avec sa projection équatoriale. Puis :

1) appelons *longitude astronomique* et *latitude astronomique* d'un point A les coordonnées polaires de la verticale de ce point: si r est la normale au géoïde, λ est la longitude astronomique et φ la latitude astronomique;

2) appelons *longitude géodésique* et *latitude géodésique* d'un point A les coordonnées polaires de la normale à l'ellipsoïde de référence passant par ce point: si r est la normale à l'ellipsoïde de référence, λ est la longitude géodésique et φ la latitude géodésique.

On donne le nom de *point astronomique* à un point dont on a calculé, par triangulation, les longitude et latitude géodésiques, et dont on a déterminé, par des observations célestes, les longitude et latitude astronomiques.

Du rapprochement de ces deux couples de coordonnées, en un point astronomique A, on peut déduire l'angle que fait la verticale du point A avec la normale à l'ellipsoïde de référence passant par ce point. Ce calcul consiste dans la résolution du problème suivant: on donne les coordonnées polaires de deux droites; on demande leur angle. C'est cet angle qui est, par définition, la *déviation de la verticale* au point A. La déviation de la verticale au point A est donc l'angle que fait la verticale en ce point avec la direction qu'elle aurait si le géoïde était l'ellipsoïde de référence.

Il résulte de cette définition que la déviation de la verticale en un point dépend essentiellement des dimensions et de la localisation terrestre de l'ellipsoïde de référence. Si l'ellipsoïde choisi avait été celui de Helmert, ou bien s'il avait été lié à la Terre de manière que l'azimut Meades Ranch-Waldo ait différé du nombre donné plus haut, les calculs de triangulation auraient fourni une autre longitude et une autre latitude géodésiques.

Il résulte encore de cette définition que la déviation de la verticale au point origine est égale à zéro.

Nous avons considéré jusqu'ici la grandeur de l'angle que font la verticale et la normale à l'ellipsoïde de référence. Nous ne nous sommes pas occupés de l'orientation du plan de cet angle. Cette notion peut être utile. Pour ne pas la laisser échapper, projetons l'angle de déviation d'une part sur le plan du méridien, d'autre part sur le vertical perpendiculaire au méridien. Ces deux projections de la déviation peuvent s'appeler respectivement :

1) la déviation nord-sud de la verticale;

2) la déviation est-ouest de la verticale.

La connaissance de ces deux composantes de la déviation équivaut à la connaissance de la grandeur de celle-ci et de l'orientation du plan auquel appartiennent les deux droites dont l'angle est mesuré par la déviation.

*
**

5. Les déviations de la verticale sont donc dues à ce que l'ellipsoïde de référence n'est pas le géoïde. Cette cause peut se décomposer dans les deux suivantes:

a) la surface du sol ne se confond pas avec le géoïde;

b) l'ellipsoïde de référence ne se confond pas avec la surface qui serait la surface du sol si celle-ci se confondait avec le géoïde.

Pour étudier la première de ces causes, nous allons évaluer la déviation du point A en l'attribuant au relief du sol autour de ce point.

Pour chaque point astronomique A, on définit un réseau constitué de deux familles de lignes à la surface de la Terre. Théoriquement, il importerait de dire quelle est la surface liée à la Terre, géoïde ou ellipsoïde de référence, sur laquelle ces lignes vont être considérées. Nous pourrions fixer les idées en disant que c'est l'ellipsoïde de référence, mais il est tout à fait inutile de faire cette distinction à l'approximation de laquelle on va travailler. Ce sont les images de ces lignes sur une carte qui seront pratiquement envisagées, et quelle que doive être, raisonnablement, l'échelle de la carte, celle-ci n'aura à subir aucune modi-

fication, qu'elle soit une représentation plane du géoïde ou de l'ellipsoïde de référence. Même, pour simplifier le langage, nous supposerons que la surface liée à la Terre, et qui portera le réseau de lignes, est assimilable à une surface sphérique. Le réseau relatif au point astronomique A est alors constitué des deux familles suivantes:

a) des petits cercles ayant le point A pour pôle;

b) des grands cercles passant par le point A.

Les petits cercles limitent des couronnes sphériquement concentriques au point A; les grands cercles limitent des fuseaux ayant le point A pour sommet commun. Le réseau des petits cercles et des grands cercles découpe la surface terrestre en quadrilatères curvilignes.

A chacun de ces quadrilatères, à chacune de ces cellules du réseau, attribuons une altitude moyenne déduite de l'examen des cartes topographiques de la région, et substituons à la masse terrestre intérieure à cette cellule, à partir du géoïde, une masse ayant la même projection géoïdale et dont la hauteur ait partout cette altitude moyenne. Le résultat de cette substitution, pour l'ensemble du réseau, est d'autant moins éloigné de la réalité que les cellules sont pius petites. Dans chaque cellule, la mesure de la masse sera le produit du volume par la densité moyenne des roches, densité pour laquelle la Géologie propose le nombre 2,267.

Un point matériel placé en A est soumis:

a) à la pesanteur, dans sa partie due à l'attraction du sphéroïde terrestre limité par le géoïde et à la force centrifuge correspondant à la rotation uniforme de la Terre par rapport au solide stellaire, système de repère pour lequel les principes de la Mécanique sont vrais;

b) à l'attraction de chacune des masses cellulaires qui viennent d'être définies.

Si les causes de la déviation de la verticale ont été bien aperçues, cette déviation se réduit à zéro en même temps que la résultante des forces qui viennent d'être notées en *b*. Calculons donc l'attraction de chacune des masses cellulaires, en raison directe de cette masse et en raison inverse du carré de la dis-

tance de son centre de gravité au point A. La direction de la résultante de la composante a et de toutes les attractions cellulaires doit être celle de la verticale telle que la déterminent les observations astronomiques, avec sa déviation calculée par rapport à la normale à l'ellipsoïde de référence.

Les géodésiens américains ont réalisé ce programme de la manière suivante (fig. 2):

1) les petits cercles terrestres se succèdent de manière que leurs rayons aillent, de 7 m. à 4126 km., en progression géométrique de raison 1,426. Il y a ainsi, autour du point astronomique, 38 circonférences dont les rayons sont, en kilomètres :

0,0079	0,2729	9,487	329,8
0,0112	0,3893	13,53	470,3
0,0160	0,5551	19,29	670,8
0,0228	0,7915	27,50	957,9
0,0325	1,129	39,22	1369
0,0463	1,609	55,92	1962
0,0660	2,295	79,76	2828
0,0941	3,272	113,73	4126
0,1342	4,665	162,27	
0,1915	6,653	231,3	

Les largeurs des couronnes ainsi formées augmentent donc énormément vers les plus grands éloignements qu'il a été utile de considérer. On comprend la légitimité de cette augmentation et par conséquent des secteurs cellulaires dans lesquels les couronnes vont être découpées: c'est que, toutes choses égales, l'attraction d'une cellule peut se calculer avec une erreur relative d'autant plus grande que cette attraction est plus faible, et par conséquent que la cellule est plus éloignée. Le rapport 1,426 a été choisi pour la facilité des calculs.

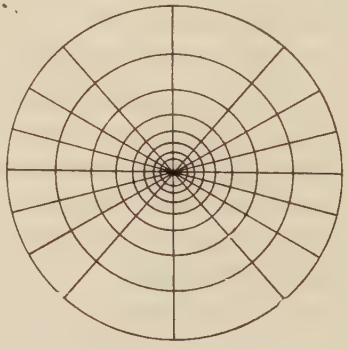


Fig. 2.

Cellules topographiques. Echelle de 1/240.000. Les circonférences représentées sont celles dont les rayons vont de 555,1 m. à 6,653 m.

2) Les grands cercles passant par le point A sont au nombre de 16. Ils ne découpent pas la sphère en fuseaux égaux; leur distribution en azimut a été choisie de manière à apporter de nouvelles simplifications dans les calculs. Cette particularité technique est ici sans importance (*Note C*).

Note. C. — Dans la construction du réseau de grands cercles et de petits cercles relatifs à chaque point astronomique A, les géodésiens américains ont procédé de la façon suivante. Un réseau de droites rayonnant d'un point A' et de circonférences ayant ce point pour centre est tracé sur une feuille de celluloïde. Les rayons des circonférences croissent en progression géométrique de raison 1,426, et représentent les rayons des petits cercles du réseau terrestre, à l'échelle de la carte qui va être utilisée. Le point A' de la feuille de celluloïde est superposé au point A sur la carte, et les cellules du géoïde sont définis par celles que forment sur la carte les cellules de la feuille transparente.

En procédant ainsi, on agit comme si la carte avait la même échelle en tout point et en toute direction. Il ne peut pourtant pas exister de pareille carte. La projection stéréographique est celle pour laquelle les petits cercles terrestres sont représentés par des circonférences de la carte, mais à des petits cercles décrits d'un même point ne correspondent pas des circonférences concentriques; de plus, aux grands cercles du géoïde ne correspondent pas des droites de la carte. Les géodésiens américains ne se sont arrêtés à cette difficulté que lorsque la carte utilisée était une carte de Mercator: « on such charts, no one scale of distances applies to the whole chart... ». Cette difficulté et quelques autres seront élucidées dans la thèse sur la mesure de la Terre par les déviations de la verticale et les anomalies de la pesanteur, que prépare M. A. Dufrasne pour le doctorat en sciences physiques et mathématiques (Université de Louvain, juillet 1928).

Voici maintenant le résultat des calculs. En tous les points astronomiques, la déviation calculée en fonction du relief du sol se montre *plus grande* que la déviation observée.

Si la déviation calculée s'était montrée ici moindre, là plus grande que la déviation observée, les divergences auraient pu être attribuées aux erreurs d'observation; elles auraient pu être attribuées partiellement aussi à la forme ellipsoïdale choisie pour surface théorique d'une Terre dont on aurait supprimé le relief, et aux valeurs données aux éléments de la forme et de la grandeur de cet ellipsoïde. Tantôt positives, tantôt négatives, elles auraient eu l'allure d'erreurs accidentelles.

Au contraire, toujours dans le même sens, elles décèlent une

erreur systématique: parmi les causes de la déviation de la verticale, il y en a au moins une qu'on n'a pas aperçue. Cette cause inaperçue agit toujours en sens inverse des montagnes: les choses se passent comme si on avait eu tort d'attribuer à la densité des montagnes celle des roches superficielles; comme s'il y avait, dans les montagnes, ou sous les montagnes, une diminution de densité, ou des vides; comme si une montagne était une boursouflure de la croûte terrestre, qui aurait laissé sous elle des portions creuses ou moins denses.

*
**

6. Cette idée nous fait retrouver la vieille *hypothèse de l'isostasie*. Pendant la mesure de l'arc du Pérou, en 1735, Bouguer a calculé la déviation de la verticale que devrait causer le Chimborazo, et la trouvant nettement supérieure à la déviation observée, a proposé d'expliquer ce déficit par une diminution de densité dans la montagne ou sous la montagne. En 1849, Petit rapproche la latitude astronomique et la latitude géodésique de Toulouse, pour en déduire la densité des Pyrénées; il trouve une déviation nulle: les choses se passent comme si cette densité était quasi égale à zéro, comme si l'intérieur des Pyrénées était à peu près complètement vide; pour une densité égale à la moitié de la densité moyenne de la Terre, la déviation de la verticale aurait dû être de 7". En 1855, Pratt fait des observations analogues dans le voisinage de l'Himalaya, et trouve 1" de déviation là où ses calculs prédisaient des déviations de 58 et 77": il reprend l'hypothèse de Bouguer, la développe, et met sur pied la théorie de l'isostasie.

Cette théorie consiste dans l'ensemble des hypothèses qui précisent de quelle manière des diminutions de densité dans les couches terrestres inférieures au géoïde tendent à compenser les excès de masse dus, dans le voisinage du géoïde, au relief du sol; hypothèses qui précisent aussi, de même, de quelle manière des augmentations de densité dans les couches terrestres sous-marines tendent à compenser les déficits de masses dus, dans le voisinage du géoïde, aux dépressions océaniques. Il nous suffira d'énoncer le principe de cette théorie en raisonnant comme si la Terre était sphérique.

Soit donc le géoïde sphérique ou quasi-sphérique, avec les irrégularités de la surface du sol: relief orographique et dépressions marines (fig. 3). Considérons, dans des orientations quelconques, des cônes ayant le sommet au centre de la Terre et découpant sur le géoïde des aires égales. Ces cônes pourront couper la surface du sol à des altitudes très diverses: un cône qui émergerait dans le massif thibétain devrait étendre ses génératrices de plusieurs milliers de mètres au delà du géoïde pour atteindre la surface géographique; et un cône qui passerait par les grandes fosses du Pacifique rencontrerait le fond de l'océan plusieurs kilomètres en dessous du géoïde. L'hypothèse isostatique fondamentale demande que tous ces cônes renferment la même masse terrestre: la portion de la Terre intérieure au cône thibétain doit avoir une densité moyenne moindre que la portion de la Terre intérieure au cône du Pacifique.

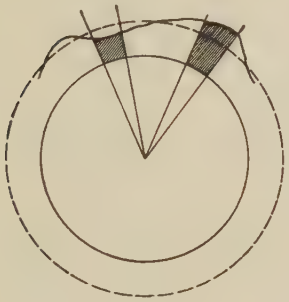


Fig. 3.

Cette compensation peut se faire d'une infinité de manières: des hypothèses subsidiaires vont réduire cette indétermination, à partir de conceptions cosmogoniques. Le refroidissement et la solidification de la masse terrestre ont commencé par la surface. La croûte ainsi formée a été le théâtre de cataclysmes dont témoigne aujourd'hui l'allure très souvent tourmentée des couches sédimentaires. A l'abri de cette écorce, la solidification a pu progresser tranquillement, et il est extrêmement vraisemblable qu'il existe des surfaces de niveau assez profondes pour que, sur chacune d'elles, la densité soit la même en chacun de ses points.

Que la solidification soit terminée ou non, on peut donc diviser le globe en deux régions: le *noyau* où toute surface de niveau est une surface d'égale densité, et *l'écorce* où il n'en est pas ainsi. Il résulte de cette distinction que la surface de séparation du noyau et de l'écorce est une surface de niveau, à savoir la plus extérieure des surfaces de niveau qui sont en même temps des surfaces d'égale densité.

Mais alors, dans la Terre supposée sphérique pour simplifier le langage, les cônes de tantôt renferment tous des masses égales depuis le sommet jusqu'à la surface de séparation du noyau et de l'écorce: la compensation isostatique des densités doit se faire entièrement entre cette surface de séparation et la surface du sol. C'est pourquoi la surface de séparation du noyau et de l'écorce s'appelle la *surface de compensation*. De la surface de compensation à la surface du sol, la distribution isostatique des densités, en fonction du relief et des dépressions, peut encore s'effectuer de bien des manières. Nous aurons à en définir quelques-unes pour nous arrêter à la plus simple.

Une confirmation précieuse de l'hypothèse isostatique s'est rencontrée dans les *anomalies de la pesanteur*. Si on nous permet un peu moins de rigueur de langage, nous pourrons dire brièvement en quoi consiste cette confirmation.

De même qu'en vue de l'étude de la déviation de la verticale on a défini un ellipsoïde de référence, on définit ici un ellipsoïde déterminé en forme, en grandeur, en masse, en répartition des densités et en localisation par rapport à la Terre: c'est le *sphéroïde normal*, masse de référence pour l'étude de l'intensité de la pesanteur à la surface de la Terre. En tout point terrestre, l'anomalie de la pesanteur est l'excès (positif ou négatif) de l'accélération de la pesanteur g, telle qu'elle est mesurée, sur l'accélération de la pesanteur g_0, telle qu'elle est calculée dans l'hypothèse d'une Terre réduite au sphéroïde normal :

$$\text{anomalie de la pesanteur} = g - g_0.$$

Ainsi l'anomalie est positive ou négative suivant que la pesanteur observée est en excès ou en défaut sur la pesanteur calculée pour le sphéroïde normal. Or, l'exploration dynamique du géoïde par la mesure des accélérations de pesanteur a fait apparaître très nettement ceci :

1) Dans les stations continentales, l'anomalie de la pesanteur est négative, et d'autant plus grande en valeur absolue que la station est plus élevée; l'accélération g étant mesurée en mètres-secondes, voici quelques exemples :

Mount Hamilton (Californie), alt. =	1282 m.,	$g - g_0 = -0{,}008$
Schneekoppe (Allemagne)	1605	$-0{,}021$
Etna (Sicile)	2943	$-0{,}014$

Ararat (Asie Mineure)	1883	— 0,105
Pic du Midi (France)	2877	— 0,116
Mont-Blanc (France)	4807	— 0,214

2) Dans les petites îles entourées de mers étendues, l'anomalie de la pesanteur est positive, et semble généralement d'autant plus grande que les dépressions voisines sont plus étendues et plus profondes :

Saint-Thomas (Atlantique)	$g - g_0 = + 0{,}227$
Fernando de Noronha (Pac.)	$+ 0{,}269$
Saint-Vincent (Atlantique)	$+ 0{,}273$
Maurice (Océan Indien)	$+ 0{,}247$
Bermudes (Atlantique)	$+ 0{,}289$
Ascension (Atlantique)	$+ 0{,}188$
Sainte-Hélène (Atlantique)	$+ 0{,}273$
Honolulu (Hawaï, Pacifique)	$+ 0{,}251$

On voit avec quelle netteté l'hypothèse isostatique est confirmée: la diminution de densité qu'elle suppose dans les couches terrestres continentales et l'augmentation de densité qu'elle suppose en dessous des océans rendent bien compte de ces anomalies de la pesanteur: relâchement dans les stations continentales, recrudescence dans les stations insulaires.

Depuis quelques années il existe des appareils (Hecker) qui permettent la mesure en mer des accélérations de la pesanteur: les anomalies y sont généralement positives et grossièrement proportionnelles à la profondeur (*Note* D).

Note D. — Il s'agit principalement des mesures effectuées en 1922 et 1923 par Duffield et Littlewood à bord des vapeurs *Anchises* et *Nestor*, dans des voyages de Glascow à Adelaïde par le Cap et par Durban. Après la conférence, le général Séligmann a attiré l'attention sur les mesures de pesanteur faites en 1923 par Vening Meinesz à bord d'un sous-marin, dans un voyage d'Amsterdam à l'île de Java: les anomalies de la pesanteur ont été presque constamment positives.

7. Au sein de l'écorce terrestre, les variations de densité d'un point à l'autre d'une même surface de niveau sont indéfinissables, comme les irrégularités de la surface du sol; et il est impossible de définir à priori une famille de surfaces qui soient les surfaces de niveau au sein de l'écorce, telles qu'elles s'y superposent depuis la surface de compensation jusqu'au géoïde.

C'est pourquoi nous avons renoncé au géoïde ellipsoïdal. Aussi le problème géodésique doit-il être repris moyennant la définition *d'une autre famille de surfaces*, auxquelles il soit possible d'attribuer un caractère géométrique simple à priori. Ces surfaces sont celles qui seraient les surfaces de niveau si les masses terrestres étaient distribuées de manière que la densité soit la même en tous les points d'une même surface de niveau: nous les appellerons des *surfaces de niveau fictives*.

Il résulte de cette définition que les surfaces de niveau fictives se confondent avec les surfaces de niveau vraies à l'intérieur du noyau, que la surface de compensation est la surface de niveau vraie la plus extérieure qui se confonde encore avec une surface de niveau fictive, et que la distinction entre les deux familles de surfaces existe en dehors de la surface de compensation.

Ici reparaît l'idée cosmogonique, pour faire attribuer une forme géométrique simple aux surfaces de niveau fictives: on les traitera comme des ellipsoïdes de révolution.

Les géodésiens américains se sont proposé de déterminer, en forme, en grandeur et en localisation terrestre, et dans l'hypothèse de surfaces de niveau fictives ellipsoïdales, la surface de niveau fictive passant par un point déterminé, à savoir la projection géoïdale de Meades Ranch. Cette surface peut porter le nom de *géoïde fictif*.

L'ellipsoïde de Clarke 1866, lié à la Terre comme il a été dit, et utilisé comme ellipsoïde de référence, a certainement un demi-grand axe et un aplatissement très voisins du demi-grand axe et de l'aplatissement du géoïde fictif. De plus, cet ellipsoïde de référence a été lié à la Terre d'une manière qui, sûrement, diffère extrêmement peu de la localisation du géoïde fictif. Ainsi le problème comporte au moins cinq inconnues, les petites corrections qu'il faut apporter:

1° au demi-grand axe a de l'ellipsoïde de référence,

2° à l'aplatissement α de cet ellipsoïde,

3° à la longitude λ de la normale à l'ellipsoïde de référence au point de projection géoïdale de la station origine Meades Ranch,

4° à la latitude φ de cette normale au même point,

5° à l'azimut z de Waldo par rapport à Meades Ranch.

pour passer, en forme, en grandeur et en localisation, de l'ellipsoïde de référence au géoïde fictif. Nous appellerons ces cinq inconnues respectivement

$$\Delta a,\ \Delta\alpha,\ \Delta\lambda,\ \Delta\varphi,\ \Delta z.$$

Il y en a une sixième. C'est en tenant compte de la composition isostatique qu'on va déterminer le géoïde fictif: la profondeur h de la surface de compensation, ou *profondeur de compensation,* entrera donc dans les équations comme sixième inconnue.

Mais la profondeur de compensation h ne suffit pas à fixer la distribution des densités de la surface de compensation à la surface du sol. Il faudrait connaître la loi suivant laquelle se fait cette distribution. Nous n'en avons aucune idée. Un essai de recherche a été tenté par la Géologie: il ne peut guère inspirer confiance. Aussi ne nous laisserons-nous guider que par la simplicité des hypothèses. La loi la plus simple est celle d'une densité constante depuis la surface du sol jusqu'à la surface de compensation. Elle ne peut pas être admise sans retouche, car la densité en un point du sol y serait d'autant moindre que l'altitude de ce point est plus grande. Nous admettrons donc cette loi à cause de sa simplicité, mais nous n'y soumettrons pas les densités dès la surface du sol. A partir, alors, de quelle profondeur? Pour sortir d'indécision, nous y soumettrons les densités à partir du géoïde. Ainsi, dans l'hypothèse qui vient d'être décrite, voici quelle sera, le long d'une verticale, la distribution des densités depuis le sol jusqu'à la surface de compensation :

1) du sol au géoïde, densité constante 2,267 des roches superficielles;

2) du géoïde à la surface de compensation, densité diminuée du terme constant nécessaire à l'hypothèse isostatique, terme d'autant plus grand que l'altitude est plus grande.

Le long d'une verticale en un point de la mer, la distribution des densités est la suivante :

1) de la surface au fond de la mer, densité de l'eau;

2) du fond de la mer à la surface de compensation, densité augmentée du terme constant nécessaire à l'hypothèse isostatique, terme d'autant plus grand que la profondeur de la mer est plus grande.

8. — Les géodésiens américains ont donc repris, pour chaque point astronomique A, le calcul des composantes nord-sud et est-ouest de la déviation de la verticale, et le rapprochement des composantes calculées et observées, avec les modifications que voici :

1) Les formules des ingénieurs-géographes sont appliquées au calcul de la longitude et de la latitude géodésiques du point A, non plus pour l'ellipsoïde de référence Clarke 1866, mais pour le géoïde fictif, avec les cinq inconnues que comportent encore sa forme, sa grandeur et sa localisation: Δa, $\Delta\alpha$, $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$, Δz.

2) Les composantes de la déviation de la verticale sont calculées en tenant compte, non seulement du relief et des dépressions du sol, mais aussi de la correction isostatique de densité du géoïde à la profondeur h: la déviation calculée est la résultante de la *déviation topographique* et de la *déviation isostatique*, ou de compensation.

A chaque point astronomique A correspondent deux équations, l'une pour la déviation nord-sud de la verticale, l'autre pour la déviation est-ouest. Dans chacune de ces équations:

1) Le premier membre est la déviation telle qu'elle résulte de la comparaison des observations astronomiques de longitude et de latitude et des calculs de longitude et de latitude géodésiques au moyen des formules des ingénieurs-géographes, comme il a été dit ci-dessus. Ce premier membre renferme donc les cinq inconnues Δa, $\Delta\alpha$, $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$, Δz.

2) Le second membre est la déviation calculée en fonction du relief topographique et de la profondeur h de compensation. Il renferme donc la sixième inconnue h.

Nous nous trouvons ainsi en présence d'autant de couples d'équations aux six inconnues finales qu'il y a de points astronomiques. Dans les opérations géodésiques des Etats-Unis, ces points ont été au nombre de plusieurs centaines, répartis sur toute l'étendue du territoire, de la côte du Pacifique à celle de l'Atlantique, de la région des grands lacs à l'extrémité méridionale du Texas: des 48 états qui forment le pays, sept seulement n'en renferment pas (fig. 4). Toutes les équations mises en œuvre constituent finalement un système de 760 équations à six incon-

nues. Les erreurs inévitables d'observation, les simplifications et limitations introduites dans les calculs numériques et l'hypothèse à priori d'un géoïde fictif ellipsoïdal de révolution rendent ces équations incompatibles. C'est à la théorie des erreurs qu'il faut s'adresser pour leur résolution.

Fig. 4. — Les Etats-Unis en projection de Mercator; échelle de 1/28.400.000 sur le parallèle de 40°. Chaque point indique une station astronomique. La croix marque l'emplacement de Meades Ranch.

Mais la théorie des erreurs ne s'adapte qu'à des équations du premier degré, et les équations actuelles ne le sont pas. Cette difficulté se présente souvent: on l'écarte sans peine par les éléments de l'analyse mathématique lorsqu'on connaît des valeurs approchées des inconnues. Or, ajoutent les traités, on peut toujours trouver des valeurs approchées des inconnues: s'il y a six inconnues, il suffit de résoudre algébriquement le système formé par six quelconques des équations proposées. Procédé illusoire dans le cas actuel, et voici pourquoi: les équations sont tellement compliquées que les méthodes habituelles de l'algèbre sont impuissantes à les résoudre.

Il est vrai qu'on possède des valeurs approchées des cinq premières inconnues, la sixième étant h; car elles représentent des quantités petites par hypothèse, et leurs valeurs approchées sont zéro. Ainsi, 760 équations de déviation de la verticale peuvent être rendues linéaires par rapport à leurs cinq premières incon-

nues; elles ne peuvent pas l'être par rapport à h. Chacune est de la forme

$$A.\,\Delta a + B.\,\Delta\alpha + C.\,\Delta\lambda + D.\,\Delta\varphi + E.\,\Delta z = F(h),$$

où les coefficients A, B, C, D, E sont des nombres variant d'une équation à l'autre, et où F (h) est une expression compliquée ne renfermant pas d'autre lettre que h (*Note* E).

*
**

9. La théorie des erreurs ne peut donc pas s'appliquer à notre système de 760 équations à six inconnues. Nous ne pouvons la lui appliquer qu'à la condition de remplacer h par un nombre, qu'à la condition de faire une hypothèse sur la profondeur de compensation. Le second membre de chaque équation devient alors purement numérique, et l'équation est du premier degré par rapport aux cinq inconnues restantes.

Cette nécessité d'une hypothèse numérique sur h est extrêmement désagréable. Rien ne peut nous guider dans le choix de tel nombre de kilomètres pour la profondeur de compensation. Aussi fait-on plusieurs hypothèses sur h; et on résout, dans chacune de ces hypothèses, et par la théorie des erreurs, le système correspondant de 760 équations à cinq inconnues. On compare ensuite les résultats de toutes les hypothèses, de manière à choisir la plus satisfaisante, ou à en déduire comment cette dernière hypothèse doit être modifiée pour devenir, non plus la plus avantageuse des hypothèses essayées, mais la plus avantageuse des hypothèses possibles.

Les valeurs numériques essayées pour h ont été les suivantes:

hypothèse I,	$h = 0$.
hypothèse II,	$h = 113.7$ km.
hypothèse III,	$h = 120{,}9$ km.
hypothèse IV,	$h = 162{,}2$ km.

On voit que l'hypothèse I équivaut à la suppression de l'isostasie, puisqu'elle ramène la surface de compensation en coïncidence avec le géoïde. Enfin, une hypothèse V étend la profondeur de compensation au rayon terrestre tout entier, comme si aucune surface de niveau, si ramassée soit-elle autour du centre de la Terre, n'admettait une même densité en tous ses points.

Voici les résultats des calculs dans chacune de ces hypothèses:

hyp.	$\Delta\lambda$	$\Delta\varphi$	Δz	Δa	$\Delta\alpha$
I	+ 0",73	— 0",98	— 1",20	— 144^m	— 0,000036
II	— 0,74	— 0,20	+ 0,09	+ 164	— 0,000024
III	— 0,86	— 0,15	+ 0,17	+ 182	— 0,000023
IV	— 1,46	+ 0,18	+ 0,58	+ 287	— 0,000015
V	— 15,53	+ 19,65	+ 9,06	+ 4836	+ 0,000530

En particulier, dans chacune de ces hypothèses, le demi-grand axe et l'aplatissement du géoïde fictif ont les valeurs suivantes :

I	a = 6.378.062 m.	α = 1/298
II	6.378.370	1/297
III	6.378.388	1/297
IV	6.378.493	1/296
V	6.383.042	1/255.1

*
**

10. On vient de parler d'une comparaison entre les conclusions des dernières hypothèses faites sur la profondeur de compensation. Sur quel élément va-t-on porter cette comparaison et à quoi reconnaîtra-t-on quelle est la meilleure de ces hypothèses?

Parmi les méthodes de la théorie des erreurs, celle qui a été appliquée à ces calculs porte le nom de *méthode des moindres carrés*. Elle a pour objet de déterminer les valeurs les plus probables des inconnues finales, dans telles circonstances spécifiées par la théorie et qui ont été considérées comme réalisées dans les observations actuelles. Pour rappeler le principe de cette méthode, considérons trois équations linéaires à deux inconnues (x, y), expressions d'observations effectuées, et rendues incompatibles par les erreurs inévitables d'observation :

$$\begin{aligned} x + y - 6{,}52 &= 0, \\ x - y - 2{,}44 &= 0, \\ 3x - 2y - 8{,}26 &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières équations montrent que les inconnues x et y sont respectivement voisines de 4,5 et de 2,2. Voyons de quelle manière les trois équations sont plus ou moins proches

d'être satisfaites pour chacun des couples de valeurs numériques

1)	$x = 4{,}4$	$y = 2{,}1$
2)	$4{,}5$	$2{,}2$
3)	$4{,}6$	$2{,}3$

attribuées aux inconnues. Dans chacun de ces essais les premiers membres des équations, au lieu de s'annuler, sont respectivement :

$$\text{essai n° 1} \begin{cases} 4{,}4 + 2{,}1 - 6{,}52 = -0{,}02 \\ 4{,}4 - 2{,}1 - 2{,}44 = -0{,}14 \\ 3 \times 4{,}4 - 2 \times 2{,}1 - 8{,}26 = +0{,}74 \end{cases}$$

$$\text{essai n° 2} \begin{cases} 4{,}5 + 2{,}2 - 6{,}52 = +0{,}18 \\ 4{,}5 - 2{,}2 - 2{,}44 = -0{,}14 \\ 3 \times 4{,}5 - 2 \times 2{,}2 - 8{,}26 = +0{,}84 \end{cases}$$

$$\text{essai n° 3} \begin{cases} 4{,}6 + 2{,}3 - 6{,}52 = +0{,}38 \\ 4{,}6 - 2{,}3 - 2{,}44 = -0{,}14 \\ 3 \times 4{,}6 - 2 \times 2{,}3 - 8{,}26 = +0{,}94 \end{cases}$$

C'est à ces nombres qu'on donne le nom de *résidus:* — 0,02, — 0,14, + 0,74 sont les résidus des équations proposées, pour les valeurs $x = 4{,}4$, $y = 2{,}1$ des inconnues, et ainsi de suite.

Pour la méthode des moindres carrés (telle qu'elle est habituellement comprise) un système de valeurs numériques des inconnues est d'autant meilleur que la *somme des carrés des résidus* est plus petite. Ainsi, dans les essais qui viennent d'être faits, les sommes R des carrés des résidus sont

pour $x = 4{,}4$	$y = 2{,}1$	$R = 0{,}5676$
$4{,}5$	$2{,}2$	$0{,}7576$
$4{,}6$	$2{,}3$	$0{,}9476$

et ce sont les valeurs numériques des inconnues du premier essai qui seront, parmi les couples essayés, considérées comme les plus avantageuses. La méthode de la théorie des erreurs considérée ici adopte donc, comme valeurs les plus avantageuses des inconnues finales, celles qui rendent minimum la somme des carrés des résidus.

Nous savons maintenant comment comparer les cinq hypothèses des équations aux éléments du géoïde fictif. Dans les 760 équations d'observations nous devons :

1) remplacer les inconnues $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$, Δz, Δa, $\Delta\alpha$ par les valeurs obtenues dans l'hypothèse I d'une profondeur $h = 0$ et la sixième inconnue h par cette valeur 0, et calculer la somme R des carrés des résidus;

2) remplacer les cinq premières inconnues par les valeurs obtenues dans l'hypothèse II d'une profondeur $h = 113{,}7$ km., et la sixième inconnue h par cette valeur 113,7, et calculer la somme R des carrés des résidus;

Et de même pour les hypothèses III, IV, V.

Voici les résultats de ces calculs :

hypothèse I	$h = 0$	R = 18889
hypothèse II	113,7 km.	10077
hypothèse III	120,9	10063
hypothèse IV	162,2	10297
hypothèse V	rayon terrestre	107385

La dernière hypothèse est détestable. La première est nettement moins bonne que les trois suivantes. La quatrième diffère à peine des deux précédentes, et celles-ci sont pratiquement équivalentes. Il faut pourtant se décider. On pourrait dire ceci: la faible variation relative de la somme des carrés des résidus, pour des augmentations de la profondeur de compensation égales à plusieurs dizaines de kilomètres, montre qu'il est illusoire de vouloir fixer cette profondeur avec une grande précision. La diminution de la somme des carrés des résidus dans le passage de l'hypothèse I aux hypothèses suivantes confirme la théorie de l'isostasie, et voilà déjà un sujet de grande satisfaction. Quant à la profondeur de compensation, elle semble bien très voisine de 120 km., presque certainement comprise entre 80 et 160 km. Adoptons, au plus simple, 120 km., et que ceci soit une sixième hypothèse au moyen de laquelle nous recommencions la résolution du système linéaire de 760 équations à cinq inconnues, pour trouver définitivement les valeurs les plus vraisemblables des éléments de forme, de grandeur et de localisation du géoïde fictif.

On peut aussi se laisser aller à l'attrait du calcul, fermer les yeux sur le caractère aléatoire de tant de suppositions déjà

faites et raisonner de la manière suivante. La somme des carrés des résidus est une grandeur qui dépend et dépend uniquement de la profondeur de compensation: R est une fonction de h. C'est une fonction de h dont nous connaissons les valeurs

$$R = \quad 10077 \qquad 10063 \qquad 10297$$

qu'elle prend respectivement pour

$$h = \quad 113{,}7 \qquad 120{,}9 \qquad 162{,}2.$$

La fonction R la plus simple à laquelle on puisse ainsi imposer trois valeurs particulières pour des valeurs données de la variable h est de la forme

$$R = n + ph + qh^2,$$

moyennant des valeurs convenables des coefficients (n, p, q).

Dans le cas actuel

$$R = 12455{,}07 - 38{,}756\ h + 0{,}1569\ h^2$$

Or, la valeur la plus avantageuse de h est celle pour laquelle R est minimum, à savoir

$$h = 123{,}5 \text{ km.}$$

C'est dans cet esprit, mais pas tout à fait de cette façon, qu'ont raisonné les géodésiens américains; ils se sont arrêtés à la profondeur de compensation

$$h = 122{,}2 \text{ km.}$$

Enfin, pour obtenir les dimensions et la position du géoïde fictif, revenons aux 760 équations aux cinq inconnues finales, écrites moyennant cette valeur de h. La méthode des moindres carrés donne alors

$$\Delta\lambda = 0'',856, \qquad \Delta\varphi = - 0'',146, \qquad \Delta z = - 4'',98$$

de sorte que le géoïde fictif ellipsoïdal est lié à la Terre de façon que les coordonnées de sa normale en la projection géoïdale de Meades Ranch sont

$$\lambda = 98°32'29'',65,$$
$$\varphi = 39°13'26'',54,$$

et que l'azimut Meades Ranch-Waldo est 75°28'9",54; de plus, dans le passage au géoïde fictif ellipsoïdal, les éléments de l'ellipsoïde de Clarke deviennent

$$a = 6.378.388 \text{ m.},$$
$$\alpha = 1/297{,}0.$$

Tels sont le rayon équatorial et l'aplatissement de la surface de niveau fictive, censée ellipsoïdale, passant par la projection géoïdale de Meades Ranch. Il est légitime de l'appeler *ellipsoïde de Hayford*, du nom du chef du *Coast and Geodetic Survey* des Etats-Unis, qui a mené à bien ces immenses travaux. (*Note* E).

Note E. — On ne se décide qu'avec peine à dire que les 760 équations de la forme

$$A.\,\Delta\lambda + B.\,\Delta\varphi + C.\,\Delta z + D.\,\Delta a + E.\,\Delta\alpha = F\,(h),$$

rendues linéaires par rapport aux cinq premières inconnues, ne peuvent pas l'être par rapport à la sixième inconnue h. Aussi le mathématicien ne s'y résout-il pas, et dit ceci. Une première recherche, par exemple par tâtonnements, et telle que celle qui est décrite dans le texte ci-dessus, donne une valeur approchée $h = 120$ km. Ainsi, h est de la forme

$$h = 120\ (1 + x),$$

où x est une quantité petite, c'est-à-dire dont le carré est négligeable, à l'approximation observée dans l'établissement des équations linéaires en $\Delta\lambda,\ldots\Delta\alpha$. Les équations d'observation prennent la forme

$$A.\,\Delta\lambda + B.\,\Delta\varphi + C.\,\Delta z + D.\,\Delta a + E.\,\Delta\alpha = F\,[120\ (1 + x)]$$

ou

$$A.\,\Delta\lambda + B.\,\Delta\varphi + C.\,\Delta z + D.\,\Delta a + E.\,\Delta\alpha = F\,(120) + 120x\left(\frac{dF}{dh}\right)_{120}$$

où le dernier facteur est la dérivée de F (h) par rapport à h dans laquelle on a remplacé h par sa valeur numérique approchée 120. Les équations d'observation sont maintenant linéaires par rapport à x, dont la connaissance équivaut à celle de h, et se laissent traiter directement par la théorie des erreurs.

Sans doute les géodésiens américains ont-ils estimé que les longs calculs par lesquels on obtiendrait, dans cette voie, la valeur finale la plus avantageuse de h, n'amélioreraient pas sensiblement les valeurs finales les plus avantageuses du demi-grand axe et de l'aplatissement de l'ellipsoïde. Du reste, il y a déjà dans le texte ci-dessus une sorte d'idéalisation des calculs. Il n'est pas vrai qu'après avoir adopté $h = 122{,}2$, on ait recommencé le traitement des équations d'observation avec cette valeur finale de h. Tout en adoptant cette valeur de h, on la déclare assez peu différente de celle ($h = 120{,}9$ km) qui caractérise l'hypothèse III, pour pouvoir néanmoins conclure que les éléments définitifs de forme, de grandeur et de localisation du géoïde sont ceux qui ont été obtenus dans cette hypothèse III.

En interpolant par une fonction du second degré

$$R = n + ph + qh^2$$

les valeurs

$$R_1 = 10077, \quad R_2 = 10063, \quad R_3 = 10297$$

de la somme des carrés des résidus, pour les valeurs essayées

$$h_1 = 113{,}7, \quad h_2 = 120{,}9, \quad h_3 = 162{,}2$$

de la profondeur de compensation, nous avons trouvé $h = 123{,}5$ km pour la profondeur de compensation à laquelle correspondrait la moindre valeur de R. Cette valeur de h s'obtient par la formule

$$h = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & h_1^2 & R_1 \\ 1 & h_2^2 & R_2 \\ 1 & h_3^2 & R_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & h_1 & R_1 \\ 1 & h_2 & R_2 \\ 1 & h_3 & R_3 \end{vmatrix} .$$

Au lieu d'interpoler par une fonction du second degré de h, les géodésiens américains ont interpolé par une fonction du second degré du logarithme de h. En cherchant, par ce procédé, la valeur de h à laquelle correspond la moindre valeur de R, par la formule

$$\log h = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \log^2 h_1 & R_1 \\ 1 & \log^2 h_2 & R_2 \\ 1 & \log^2 h_3 & R_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \log h_1 & R_1 \\ 1 & \log h_2 & R_2 \\ 1 & \log h_3 & R_3 \end{vmatrix} ,$$

je trouve $h = 121{,}9$ km. Ce n'est pas explicitement cette formule que les géodésiens ont appliquée. Ils ont résolu le problème par une méthode assez inattendue et dont la description exige l'interprétation géométrique du calcul d'interpolation: dans un plan rapporté à un axe des abscisses h et à un axe des ordonnées R, la valeur h demandée est l'abscisse du point le plus bas de la parabole dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des R et qui passe par les trois points dont les abscisses et ordonnées sont (h_1, R_1), (h_2, R_2), (h_3, R_3).

Après la conférence, M. E. Lagrange a exprimé le regret que des valeurs de h n'aient pas été essayées dans le voisinage de 40 km. En effet, la manière dont se propagent les ondes sismiques permet de croire qu'il y a, vers cette profondeur, une surface de discontinuité, et celle-ci pourrait avoir quelque connexion avec la compensation isostatique.

Dans le texte, il n'a pas été fait d'autre hypothèse isostatique que celle d'une compensation uniformément répartie depuis le géoïde jusqu'à la surface de compensation. Les Américains ont examiné trois autres hypothèses; nous allons définir les deux plus intéressantes, et donner leurs résultats. Les opérations et les calculs ci-dessus ont été effectués en deux fois. Les mesures de la première campagne ont été mises en œuvre comme s'il ne devait pas y en avoir de deuxième, au cours de laquelle de nombreux points astronomiques supplémentaires ont été utilisés. Après la première campagne, les résultats étaient les suivants

$$a = 6.378.283 \text{ m},$$
$$\alpha = 1/297{,}8$$

avec une profondeur de compensation de 113 km, dans l'hypothèse d'une répartition uniforme de la compensation isostatique,

dans toute l'épaisseur de l'écorce terrestre, à partir du géoïde. Les deux hypothèses supplémentaires sur la compensation n'ont été appliquées qu'aux observations de la première campagne.

Une hypothèse a été faite, tout à fait arbitraire, et à laquelle on ne peut trouver d'autre intérêt que celui d'un essai numérique : hypothèse d'une compensation isostatique uniformément distribuée sur une épaisseur de dix milles, la surface la plus profonde atteinte par la variation de densité étant alors la surface de compensation. Dans ce cas, la profondeur de compensation obtenue a été de 60 km.

On a supposé aussi un accroissement de la densité de compensation depuis la surface de compensation, où elle serait nulle, jusqu'au géoïde où elle serait maximum, et de manière qu'elle varie, d'une couche à l'autre, proportionnellement à la distance de ces couches. La profondeur de compensation correspondante est 175 km.

Une dernière remarque. — Le demi-grand axe de l'ellipsoïde de Hayford, a = 6.378.388 m, l'emporte nettement sur le demi-grand axe des ellipsoïdes déterminés par la méthode des arcs, à savoir

a = 6.377.397 m, 6.378.206 m, 6.378.249 m, 6.378.140 m,

respectivement pour les ellipsoïdes de Bessel 1841, Clarke 1866, Clarke 1880 et Helmert 1907: les différences sont 991, 182, 139, 248 m. Il y a là un caractère systématique dont il faut chercher la raison. Celle-ci ne peut pas se trouver, semble-t-il, dans la distinction entre l'ellipsoïde de la méthode des arcs et le géoïde ellipsoïdal fictif de la méthode des aires. Aussi les géodésiens américains n'envisagent-ils pas cette distinction et attribuent-ils la différence tout entière à ce que la méthode des arcs fait abstraction de l'isostasie. Voici de quelle manière, selon eux, cette circonstance introduit une erreur systématique dans les résultats de la méthode des arcs. Les arcs de méridien mesurés sont aussi longs que possible; ils s'étendent souvent sur tout un continent, de la côte septentrionale à la côte méridionale. Aux extrémités de l'arc, l'attraction de la masse continentale dévie vers celle-ci le nadir de la verticale, et la différence de latitude de ces points en est diminuée. Terminons le raisonnement comme si le géoïde était sphérique: à une même longeur d'arc correspond un rayon terrestre d'autant moindre que la différence des latitudes est moindre; et cette conclusion reste valable, toutes autres choses égales, pour le demi-grand axe d'un géoïde ellipsoïdal.

N° 64.

Sur les mesures d'égale précision

par M. M. Alliaume (1)

Résumé. — Principalement au moyen d'une interprétation géométrique, étude des valeurs possibles d'une grandeur inconnue mesurée plusieurs fois avec la même approximation.

A propos de mesures directes d'une grandeur x, envisageons le cas dans lequel toutes les mesures ont été faites avec la même approximation M, et supposons que les résultats m_1, m_2, ... m_n des mesures sont rangés dans un ordre non décroissant :

$$m_1 - M \leqslant x \leqslant m_1 + M,$$
$$m_2 - M \leqslant x \leqslant m_2 + M,$$
$$\cdots\cdots$$
$$m_n - M \leqslant x \leqslant m_n + M.$$

La borne inférieure efficace I est la dernière des bornes de gauche, et la borne supérieure efficace S est la première des bornes de droite :

$$I = m_n - M, \quad S = m_1 + M.$$

La compatibilité des nombres (m_1, m_n, M) exige que $I \leqslant S$, c'est-à-dire

$$2M \geqslant m_n - m_1.$$

Les valeurs possibles de x sont celles qui satisfont à la condition

$$m_n - M \leqslant x \leqslant m_1 + M,$$

à savoir

$$x = \frac{m_1 + m_n}{2} + \theta\left(M - \frac{m_n - m_1}{2}\right)$$

où

$$-1 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 48 (1928), série A, *Sciences mathématiques*, p. 59 de la première partie.

et la valeur la plus approximative de l'inconnue est $x = \frac{m_1 + m_n}{2}$, $(\theta = 0)$.

En résumé, l'adoption d'une association déterminée $f(m_1, m_2, \ldots m_n)$ des résultats des mesures correspond à un choix de M et de θ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{m_1 + m_n}{2} + \theta\left(M - \frac{m_n - m_1}{2}\right) = f, \\ 2M \geqslant m_n - m_1, \qquad -1 \leqslant \theta \leqslant 1. \end{cases}$$

Par rapport à des axes des M et des θ, l'équation représente une hyperbole dont les asymptotes sont $\theta = 0$ et $M = \frac{m_n - m_1}{2}$. Cette hyperbole se réduit à ses asymptotes pour une association f qui soit la valeur la plus approximative $\frac{m_1 + m_n}{2}$ de l'inconnue finale, et θ est nul quel que soit M pourvu que supérieur à l'approximation minimum. Dans le cas général, les inégalités restreignent à une portion d'une seule branche de la courbe la partie utile de celle-ci, et cette partie utile renferme toujours l'arc illimité qui se rapproche indéfiniment de l'axe des M. La branche à laquelle appartient la partie utile rencontre la droite $\theta = 1$ ou la droite $\theta = -1$ suivant que le nombre f est plus grand ou plus petit que la valeur la plus approximative de l'inconnue. Dans le premier cas, les points utiles de l'hyperbole ont des ordonnées θ positives, à partir de $\theta = 1$ pour $M = f - m_1 = \frac{m_n - m_1}{2} + f - \frac{m_1 + m_n}{2}$, et tendant vers 0 lorsque M augmente indéfiniment. Dans le second cas, les points utiles de l'hyperbole ont des ordonnées θ négatives à partir de $\theta = -1$ pour $M = m_n - f = \frac{m_n - m_1}{2} - f - \frac{m_1 + m_n}{2}$, et tendant vers 0 lorsque M augmente indéfiniment (figure page suivante).

L'hyperbole considérée appartient à un faisceau en f. Il n'y a pas lieu de prévoir des valeurs du paramètre f extérieures à l'intervalle (m_1, m_n). La partie utile du faisceau est donc limitée aux deux hyperboles

$$\theta\left(M - \frac{m_n - m_1}{2}\right) = \frac{m_1 - m_n}{2},$$

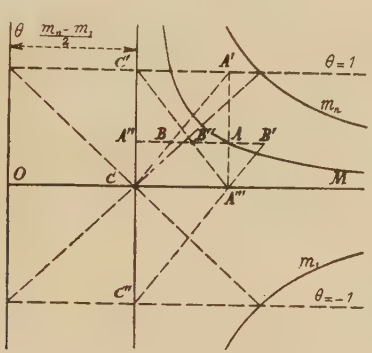
$$\theta\left(M - \frac{m_n - m_1}{2}\right) = \frac{m_n - m_1}{2}.$$

La branche utile de l'une et la branche utile de l'autre sont symétriques par rapport à l'axe des M, rencontrant respectivement les droites $\theta = -1$ et $\theta = 1$ en des points qui ont pour abscisse commune $M = m_n - m_1$. Ces points sont symétriques des points $(M = 0, \theta = 1)$ et $(M = 0, \theta = -1)$ par rapport au centre C des hyperboles.

La valeur commune aux moindres approximations compatibles avec ces

valeurs extrêmes de f est donc deux fois plus grande que l'approximation minimum compatible avec la valeur la plus approximative de l'inconnue. Si le paramètre f appartient à l'intervalle $\left(m_1, \frac{m_1 + m_n}{2}\right)$, la moindre approximation compatible avec cette valeur f du paramètre est $(m_n - f)$; elle devient $(f - m_1)$ si le paramètre appartient à l'intervalle $\left(\frac{m_1 + m_n}{2}, m_n\right)$.

La valeur le plus souvent attribuée au paramètre f est *la moyenne arithmétique* des résultats de toutes les mesures.



La figure en (M, θ) permet la représentation de la valeur x correspondant à un choix numérique du couple (M, θ). Soient A le point (M, θ), A′ sa projection sur la droite θ 1 parallèlement à l'axe des θ, et A″ sa projection sur la droite $M = \frac{m_n - m_1}{2}$ parallèlement à l'axe des M. La droite CA′ coupe la droite AA″ en un point B tel que $A''B \quad \theta\left(M - \frac{m_n - m_1}{2}\right)$: c'est l'excès de x sur la demi-somme $\frac{m_1 + m_n}{2}$ des valeurs extrêmes.

L'une quelconque

$$x = \frac{m_1 + m_n}{2} + \theta\left(M - \frac{m_n - m_1}{2}\right), \qquad -1 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

des valeurs possibles de l'inconnue a une *approximation de gauche*

$$M_g = x - l = (1 + \theta)\left(M - \frac{m_n - m_1}{2}\right)$$

et une *approximation de droite*

$$M_d = S - x = (1 - \theta)\left(M - \frac{m_n - m_1}{2}\right).$$

L'*approximation efficace* est la plus grande de ces deux quantités.

L'approximation efficace est minimum pour $M_g = M_d$, c'est-à-dire pour $\theta = 0$:

$$x = \frac{m_1 + m_n}{2}, \qquad M_g = M_d = M - \frac{m_n - m_1}{2} ;$$

pour une valeur $x = f$, l'approximation efficace est l'approximation de gauche ou l'approximation de droite suivant que f est inférieur ou supérieur à $\frac{m_1 + m_n}{2}$.

La figure en (M, θ) permet aussi la représentation des deux approximations latérales. Soient A, A′, A″ les points définis ci-dessus, A‴ la projection du point A sur l'axe des M parallèlement à l'axe des θ, C′ et C″ les points d'intersection de la droite $M = \frac{m_n - m_1}{2}$ respectivement avec la droite $\theta = 1$ et avec la droite $\theta = -1$, B′ et B″ les points d'intersection de la droite AA″ respectivement avec la droite C″A‴ et avec la droite C′A‴ : le segment A″B′ mesure l'approximation de gauche, et le segment A″B″ mesure l'approximation de droite.

La relation entre l'approximation et le poids d'une observation

par M. M. Alliaume [1]

Résumé. — Les données primitives du problème de la théorie des erreurs renferment les approximations des observations plutôt que leurs poids. Dans la recherche des valeurs les plus probables des inconnues finales, moyennant une loi d'erreur exponentielle, il est nécessaire de posséder la relation entre le poids et l'approximation : les poids sont inversement proportionnels aux carrés des approximations.

Lorsqu'on a effectué sur une même grandeur des mesures directes dans des circonstances différentes, on attribue à ces mesures des *poids* différents. Soient m_1, m_2, ... m_n les résultats de n mesures, et h_1^2, h_2^2, ... h_n^2 les poids correspondants. La *méthode des moindres carrés* adopte la *moyenne par poids*

$$x = \frac{m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + \cdots + m_n h_n^2}{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}.$$

Cependant, l'énoncé du problème est le suivant :

On a effectué n mesures m_1, m_2, ... m_n d'une grandeur x, moyennant une partie aliquote minimum $2\Delta x$, des *approximations* respectives M_1, M_2, ... M_n, et des lois de probabilité des erreurs $(x - m)$

$$y = f_1(x - m), \qquad y = f_2(x - m), \ \ldots \ y = f_n(x - m)$$

respectivement. On demande la valeur la plus probable de x.

---

[1] Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 48 (1928), série A, *Sciences mathématiques*, p. 62 de la première partie.

Les poids des mesures ne font pas partie des données de ce problème, et ce sont les approximations qui expriment la qualité des observations. Il y a donc lieu de se rendre compte de la manière dont les poids s'introduisent dans la solution du problème, et de trouver une relation entre le poids et l'approximation de chaque mesure, pour éliminer du résultat final les poids au profit des approximations.

Les valeurs x_i possibles de x sont les multiples de $2\Delta x$ satisfaisant aux inégalités

$$\begin{aligned} m_1 - M_1 &\leqslant x_i \leqslant m_1 + M_1 , \\ m_2 - M_2 &\leqslant x_i \leqslant m_2 + M_2 , \\ &\cdots\cdots \\ m_n - M_n &\leqslant x_i \leqslant m_n + M_n , \end{aligned}$$

dont les membres de gauche et de droite se réduisent respectivement à une borne inférieure I et à une borne supérieure S, que nous supposerons compatibles :

$$I \leqslant x_i \leqslant S.$$

La probabilité de l'une des valeurs possibles x_i de l'inconnue est la probabilité d'une erreur $(x_i - m_1)$ dans la première mesure, et d'une erreur $(x_i - m_2)$ dans la deuxième mesure, et ainsi de suite. C'est la probabilité composée

$$\int_{x_i-\Delta x}^{x_i+\Delta x} f_1(x-m_1)\,dx \cdot \int_{x_i-\Delta x}^{x_i+\Delta x} f_2(x-m_2)\,dx \cdots \int_{x_i-\Delta x}^{x_i+\Delta x} f_n(x-m_n)\,dx ,$$

c'est-à-dire, à l'approximation habituelle (où chaque facteur de ce produit est remplacé par le terme en Δx, le terme constant étant nul, de son développement suivant les puissances de Δx),

$$(2\Delta x)^n f_1(x_i - m_1) \cdot f_2(x_i - m_2) \cdots f_n(x_i - m_n).$$

Cette probabilité est maximum pour la valeur de x_i admissible et la plus voisine de la racine de l'équation

$$\frac{1}{f_1(x-m_1)} \cdot \frac{df_1(x-m_1)}{d(x-m_1)} + \cdots + \frac{1}{f_n(x-m_n)} \cdot \frac{df(x-m_n)}{d(x-m_n)} = 0.$$

C'est dans le cas de *lois d'erreur exponentielles*

$$y = \lambda_1 e^{-h_1^2(x-m_1)^2}, \quad \cdots \quad y = \lambda_n e^{-h_n^2(x-m_n)^2}$$

et moyennant, en particulier, des poids h_1^2, h_2^2, ... h_n^2, que la racine de cette équation est la moyenne par poids des résultats des mesures.

La moyenne par poids des résultats des mesures est la valeur de x qui rend minimum la somme des carrés des résidus des équations d'observation

$$x = m_1 , \qquad x = m_2 , \ldots . x = m_n$$

multipliées respectivement par les indices de précision ou racines carrées des poids des mesures qu'elles expriment. Les équations d'observation ainsi modifiées

$$xh_1 = mh_1 , \quad xh_2 = m_2h_2 , \ldots . xh_n = m_nh_n$$

doivent donc être considérées comme exprimant des mesures dont les résultats auraient été m_1h_1, m_2h_2, ... $m_n h_n$ et qui auraient été faites avec la même approximation. Ainsi, dans les inégalités correspondantes

$$\begin{aligned} -h_1\mathrm{M}_1 &\leqslant x_ih_1 - m_1h_1 \leqslant h_1\mathrm{M}_1 , \\ -h_2\mathrm{M}_2 &\leqslant x_ih_2 - m_2h_2 \leqslant h_2\mathrm{M}_2 , \\ \ldots\ldots & \\ -h_n\mathrm{M}_n &\leqslant x_ih_n - m_nh_n \leqslant h_n\mathrm{M}_n , \end{aligned}$$

tous les membres de gauche et tous les membres de droite doivent être considérés comme ayant même valeur absolue, approximation commune à toutes ces observations fictives :

$$h_1\,\mathrm{M}_1 = h_2\,\mathrm{M}_2 = \cdots = h_n\,\mathrm{M}_n .$$

Les poids des mesures sont inversement proportionnels aux carrés des approximations, et, en fonction des données, l'expression de la moyenne par poids est

$$x = \frac{\dfrac{m_1}{\mathrm{M}_1^2} + \dfrac{m_2}{\mathrm{M}_2^2} + \cdots + \dfrac{m_n}{\mathrm{M}_n^2}}{\dfrac{1}{\mathrm{M}_1^2} + \dfrac{1}{\mathrm{M}_2^2} + \cdots + \dfrac{1}{\mathrm{M}_n^2}} .$$

Il arrive souvent que le physicien ne peut pas donner les valeurs numériques des approximations. Il ne peut exprimer les circonstances des mesures que par des coefficients k_1, k_2, ... k_n auxquels les approximations sont proportionnelles. Cette restriction n'empêche pas l'emploi de la moyenne par poids :

$$x = \frac{\dfrac{m_1}{k_1^2} + \dfrac{m_2}{k_2^2} + \cdots + \dfrac{m_n}{k_n^2}}{\dfrac{1}{k_1^2} + \dfrac{1}{k_2^2} + \cdots + \dfrac{1}{k_n^2}} .$$

En d'autres termes, les inverses des carrés de ces coefficients peuvent être adoptés comme poids des observations.

Cette relation entre le poids et l'approximation se rencontre aussi bien dans le cas général de *mesures indirectes* d'inégale précision.

n équations linéaires

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= g_1 , \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= g_2 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x + b_n y + c_n z &= g_n , \end{aligned}$$

dont les coefficients (a, b, c) sont connus, lient trois inconnues finales (x, y, z) à n quantités $g_1, g_2, \ldots g_n$ sur lesquelles portent les mesures. Ces n mesures se sont effectuées moyennant une partie aliquote minimum $2\Delta\xi$, des approximations respectives $M_1, M_2, \ldots M_n$ et des lois de probabilité des erreurs $(\xi - m)$

$$\eta = f_1(\xi - m), \quad \eta = f_2(\xi - m), \ldots \eta = f_n(\xi - m)$$

respectivement. Les résultats des mesures sont $m_1, m_2, \ldots m_n$. On demande les valeurs les plus probables des inconnues finales x, y, z.

Les valeurs possibles (x_i, y_i, z_i) des inconnues finales sont les multiples des parties aliquotes minima respectivement attribuées à ces trois grandeurs, et qui satisfont aux équations linéaires

$$\begin{aligned} a_1 x_i + b_1 y_i + c_1 z_i &= g_{1i} , \\ a_2 x_i + b_2 y_i + c_2 z_i &= g_{2i} , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x_i + b_n y_i + c_n z_i &= g_{ni} , \end{aligned}$$

moyennant les inéquations

$$\begin{aligned} -M_1 \leqslant g_{1i} - m_1 \leqslant M_1 , \\ -M_2 \leqslant g_{2i} - m_2 \leqslant M_2 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -M_n \leqslant g_{ni} - m_n \leqslant M_n , \end{aligned}$$

c'est-à-dire aux inéquations

$$\begin{aligned} m_1 - M_1 \leqslant a_1 x_i + b_1 y_i + c_1 z_i \leqslant m_1 + M_1 , \\ m_2 - M_2 \leqslant a_2 x_i + b_2 y_i + c_2 z_i \leqslant m_2 + M_2 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ m_n - M_n \leqslant a_n x_i + b_n y_i + c_n z_i \leqslant m_n + M_n . \end{aligned}$$

La probabilité de l'un des groupes possibles (x_i, y_i, z_i) des inconnues finales, c'est-à-dire des valeurs correspondantes $g_{1i}, g_{2i}, \ldots g_{ni}$ des seconds

membres des équations proposées, est aussi la probabilité d'une erreur $(g_{1i} - m_1)$ dans la première mesure, et d'une erreur $(g_{2i} - m_2)$ dans la deuxième, et ainsi de suite. C'est la probabilité composée

$$\int_{g_{1i}-\Delta\xi}^{g_{1i}+\Delta\xi} f_1(\xi - m_1)\,d\xi \;\ldots\ldots\; \int_{g_{ni}-\Delta\xi}^{g_{ni}+\Delta\xi} f_n(\xi - m_n)\,d\xi\,,$$

c'est-à-dire, à l'approximation habituelle

$$(2\Delta\xi)^n f_1(g_{1i} - m_1) \ldots f_n(g_{ni} - m_n)$$

ou bien

$$(2\Delta\xi)^n \prod_{k=1}^{n} f_k(a_k x_i + b_k y_i + c_k z_i - m_k).$$

Cette probabilité est maximum pour les valeurs des (x_i, y_i, z_i) admissibles et les plus voisines des racines des équations

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f_k(a_k x + b_k y + c_k z - m_k)} \cdot \frac{\partial f_k(a_k x + b_k y + c_k z - m_k)}{\partial x} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f_k(a_k x + b_k y + c_k z - m_k)} \cdot \frac{\partial f_k(a_k x + b_k y + c_k z - m_k)}{\partial y} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f_k(a_k x + b_k y + c_k z - m_k)} \cdot \frac{\partial f_k(a_k x + b_k y + c_k z - m_k)}{\partial z} = 0.$$

Dans le cas de *lois d'erreur exponentielles*

$$\eta = \lambda_1 e^{-h_1^2(\xi - m)^2}, \ldots\ \eta = \lambda_n e^{-h_n^2(\xi - m)^2},$$

avec, en particulier, les poids $h_1^2, h_2^2, \ldots, h_n^2$, le groupe (x, y, z) cherché est le groupe admissible (x_i, y_i, z_i) dont les composantes sont les plus voisines de celles du groupe (x, y, z) qui rend minimum

$$\sum_{k=1}^{n} h_k^2 (a_k x + b_k y + c_k z - m_k)^2,$$

à savoir les plus voisines des racines du système linéaire

$$[ah \,.\, ah]x + [ah \,.\, bh]y + [ah \,.\, ch]z = [ah \,.\, mh],$$
$$[bh \,.\, ah]x + [bh \,.\, bh]y + [bh \,.\, ch]z = [bh \,.\, mh],$$
$$[ch \,.\, ah]x + [ch \,.\, bh]y + [ch \,.\, ch]z = [ch \,.\, mh].$$

Ces racines sont les valeurs de (x, y, z) qui rendent minimum la somme des carrés des résidus des équations d'observation

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= m_1 , \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= m_2 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ a_n x + b_n y + c_n z &= m_n \end{aligned}$$

multipliées respectivement par les indices de précision des mesures correspondantes. Les équations d'observation ainsi modifiées,

$$a_1 h_1 x + b_1 h_1 y + c_1 h_1 z = m_1 h_1 , \ldots$$

doivent donc être considérées comme exprimant des mesures portant sur $g_1 h_1, g_2 h_2, \ldots g_n h_n$, dont les résultats auraient été $m_1 h_1, m_2 h_2, \ldots m_n h_n$, et qui auraient été faites avec la même approximation. Ainsi dans les inégalités correspondantes

$$\begin{aligned} -h_1 M_1 \leqslant g_{i1} h_1 - m_1 h_1 &\leqslant h_1 M_1 , \\ -h_2 M_2 \leqslant g_{i2} h_2 - m_2 h_2 &\leqslant h_2 M_2 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ -h_n M_n \leqslant g_{in} h_n - m_n h_n &\leqslant h_n M_n , \end{aligned}$$

tous les membres de gauche et tous les membres de droite doivent être considérés comme ayant même valeur absolue, approximation commune à toutes ces observations fictives :

$$h_1 M_1 = h_2 M_2 = \ldots = h_n M_n .$$

N° 66.

P.-J.-Édouard Goedseels

par M. M. Alliaume (1)

Pierre-Jean-Édouard Goedseels, né à Louvain le 19 août 1857, a été professeur à l'Université de Louvain de 1901 à 1918. Il y a enseigné l'Astronomie et les branches connexes : Calcul des probabilités, Géodésie et Topographie. Professeur honoraire depuis 1918, il est mort à La Hulpe le 22 juillet 1928.

Édouard Goedseels fit ses études moyennes au collège que dirigent à Louvain les PP. Joséphites. Au sortir du collège, il exprima l'intention d'entrer à l'École militaire. Son désir se heurta à l'opposition paternelle. Il se fit inscrire à la Faculté des sciences de l'Université de Louvain. Cependant, il n'avait pas renoncé à son projet, et il semble bien qu'il ne s'est pas proposé la conquête d'un diplôme : dans l'enseignement qu'il recevait à l'Université, il ne vit guère que le moyen d'entretenir et d'approfondir les connaissances mathématiques qui lui seraient un jour nécessaires pour se préparer à la carrière d'officier.

Il perdit bientôt son père et réussit, en septembre 1877, l'examen d'admission à l'École militaire, dans la section de l'artillerie et du génie, dite des armes spéciales. Nommé élève sous-lieutenant en 1879, après les deux années que comporte l'enseignement purement scientifique, il entra à l'École d'application. Vers la fin de sa deuxième année à cette école, au moment de la quitter pour un régiment d'artillerie, il demanda, pour des raisons personnelles, à être versé dans l'infanterie. Une décision ministérielle d'août 1881 fit droit à cette demande, et le sous-lieute-

(1) Revue des Questions scientifiques, 4e série, t. 16 (1929, 2), p. 177.

nant Goedseels fut attaché au 11me régiment de ligne, en garnison à Louvain.

La formation scientifique que lui avaient donnée ses études à la section des armes spéciales le désignait pour d'autres services que celui du régiment. Promu lieutenant en avril 1886, il venait de reprendre place parmi les élèves de l'Université de Louvain et de réussir la première épreuve de la candidature en sciences physiques et mathématiques, lorsqu'il fut désigné, en février 1888, pour remplir les fonctions de répétiteur du cours de Géométrie descriptive à l'École militaire. Il s'y trouva sous les ordres du professeur Chomé, qui a pris une part si active à la réforme de l'enseignement de la Géométrie descriptive dans notre pays. Ce fut, entre le professeur et le répétiteur, une intime collaboration, dont les traces se retrouvent dans les ouvrages de Chomé.

Une décision ministérielle de septembre 1890 détacha provisoirement le lieutenant Goedseels à l'École de guerre, où il fut chargé du cours de Géométrie descriptive et d'un cours, probablement de compléments, que les programmes de l'époque appellent cours facultatif de mathématiques.

Nommé capitaine en second en juin 1893, il fut déchargé en septembre de la même année de ses fonctions de répétiteur à l'École militaire, et un arrêté royal de la même date le versait dans le corps professoral de l'École de guerre où il avait à assumer les cours de Géométrie descriptive, d'Astronomie et de Géodésie. En juin 1896, ce fut le retour à l'École militaire, avec le grade de commandant et les fonctions de professeur de Topographie. — Mais la carrière militaire d'Édouard Goedseels touchait à sa fin : en septembre 1898, il demandait et recevait l'autorisation de quitter l'armée. Son feuillet du registre matricule porte une « supputation des services » de 20 ans 9 mois et 27 jours.

Goedseels avait conservé de son séjour à l'armée les meilleurs de ses souvenirs. L'École militaire était restée

pour lui l'école par excellence. Il l'a véritablement aimée, et avait gardé pour elle, et pour les vieilles traditions qu'il y avait connues, quelques faiblesses. Il ne manquait pas une occasion de la proposer en modèle : « Du reste, disait-il en suggérant, ailleurs, quelque réforme, c'est ainsi qu'on fait à l'École militaire ». Il s'était créé à l'armée de fidèles amitiés, et, jusqu'à la fin de sa vie, la réunion annuelle de ses camarades de promotion était une fête à laquelle il n'aurait, pour rien au monde, voulu manquer.

C'est en vue d'une carrière plus exclusivement scientifique que le commandant Goedseels a quitté l'armée. L'Observatoire royal et l'Institut royal météorologique viennent d'être réorganisés. Cette réorganisation comporte la nomination d'un administrateur-inspecteur, intermédiaire entre les services scientifiques et le gouvernement, avec des fonctions toutes de sagesse et de mesure et qui ne pouvaient être efficaces que remplies par un homme qui fût à la fois un véritable savant et un bon administrateur. C'est à ces fonctions que Goedseels fut appelé : ses qualités l'y désignaient très exactement.

Habitant l'Observatoire, à deux pas de ses bureaux, habile à assurer à son temps un rendement maximum, Édouard Goedseels eut vite fait d'organiser sa besogne administrative de manière à se ménager des loisirs pour le travail scientifique et la recherche personnelle. Aussi, lorsqu'elle s'offrit, ne laissa-t-il pas échapper l'occasion de faire l'essai de ses méthodes dans un enseignement qui s'adresserait, d'une part, dans un cours général, à des auditeurs nombreux, d'autre part et surtout à quelques spécialistes dont il pourrait s'occuper de plus près.

A l'Université de Louvain, le professeur Ernest Pasquier assumait à cette époque l'enseignement de la Mécanique analytique et de l'Astronomie. Frappé par une maladie des yeux qui a été le cauchemar d'une grande partie de sa carrière, il cherchait à s'alléger de ses cours d'Astronomie à la candidature et au doctorat en sciences physi-

ques et mathématiques, ainsi que dans la deuxième année d'études du grade de candidat ingénieur. Il proposa et obtint la désignation de l'administrateur de l'Observatoire pour assurer cet enseignement.

Nommé d'emblée en 1901 professeur ordinaire, pour les cours qu'abandonnait le professeur Pasquier, Édouard Goedseels succédait en 1906 au professeur Joseph Carnoy dans la chaire de Calcul des probabilités, et il reprenait, en 1908, le cours de Topographie, des mains du professeur André Dumont.

Il avait la passion de l'enseignement. C'est surtout dans les cours du doctorat, faits pour un petit nombre d'auditeurs, qu'il sut inspirer à ses élèves une féconde confiance dans ses méthodes de travail, et à s'en faire des disciples. Il était tout à leur disposition, passant des heures à les interroger, à les diriger. Souvent d'une manière discrète, son influence s'est fait sentir en dehors de l'Université, et nombreuses sont les écoles, nombreux sont les professeurs de l'enseignement moyen qui ont bénéficié de ses inspections bénévoles et de ses conseils.

Il publiait beaucoup. Extrêmement dévoué à la Société scientifique de Bruxelles, dont il porta, en mémoire de sa générosité, le titre de membre fondateur, il ne laissait guère passer de session de cette compagnie sans y présenter quelque communication.

Il prit à cœur la réorganisation des travaux topographiques aux Écoles spéciales de l'Université. Cette tâche lui demanda beaucoup de peines, et l'humble travail de la préparation des carnets pour les observations et les calculs lui coûta, en de longs tâtonnements et de nombreux essais, beaucoup de temps.

Mais sa santé s'était affaiblie. La cinquantaine passée, il avait subi une opération grave depuis laquelle il devait extrêmement se ménager. Aussi demanda-t-il, en 1913, un suppléant pour la plus grande partie de ses cours : pendant l'année académique 1913-1914 il ne fit que les

leçons de Géométrie descriptive appliquée dont il avait accepté provisoirement la charge. Dès la fin de la guerre, il demanda au Recteur de l'Université de recevoir sa démission. La lettre de réponse, par laquelle cette demande est agréée, et où Mgr Ladeuze, au nom des évêques de Belgique, confère à Édouard Goedseels le titre de professeur honoraire de l'Université catholique, est, par ses éloges et ses expressions de gratitude, le beau couronnement d'une carrière professorale toute de science, de conscience et de dévouement.

En 1922, atteint par la limite d'âge, il quitta l'Observatoire et l'Institut météorologique. Il était veuf depuis quelques mois. La mort de sa femme lui avait fait perdre une compagne toute de douceur et de bon sens, et les trois fils qu'elle avait admirablement élevés suivaient leurs voies en dehors de la maison paternelle. Libéré de devoirs familiaux, il voulut consacrer la fin de sa vie à Dieu, et peut-être un secret désir était-il en lui depuis l'enfance, depuis le collège où il se plaignait de ce que le caprice d'un professeur l'eût détourné des humanités anciennes. En 1923, à 66 ans, Édouard Goedseels entra comme élève au séminaire de Malines, dans la maison créée par le Cardinal Mercier, pour les vocations tardives, nombreuses au lendemain de la guerre. Il avait une foi d'une grande clarté, et il en avait toujours eu la préoccupation. Aussi tout n'était-il pas à faire dans sa formation théologique, et pouvait-il bénéficier d'un régime spécial. Mais il devait aborder l'étude du latin. Il s'y mit avec courage et suivant la méthode de travail qu'il avait, toute sa vie, appliquée aux mathématiques : il écrivit, pour son seul usage, une grammaire latine. Cependant la mémoire s'affaiblissait, la plume tremblait dans la main, et la bonne utilisation du temps devenait de plus en plus difficile. Il franchit les premiers degrés de la hiérarchie ecclésiastique ; il n'arriva pas au sacerdoce. Il s'était engagé dans cette voie pour célébrer « ne fût-ce qu'une

fois, la sainte messe ». Il ne devait pas avoir ce bonheur. Il fallut bien lui demander d'y renoncer. Ceux qui le connaissaient très bien ont su la douleur de ce déchirement, mais la résignation fut immédiate et sans murmure : « Tout ce qui nous arrive, avait-il toujours dit, c'est quand même pour notre bien ».

Investi des ordres mineurs, il continua de porter la soutane. Il se retira à La Hulpe, dans une maison de retraite pour prêtres âgés. Il y passa quelques mois de grande tranquillité. La mémoire, qui fixait de moins en moins bien les faits récents, avait tout gardé des événements anciens, et c'étaient des souvenirs très précis que racontait encore le plus clairvoyant des témoins : la vieille abbaye de la Cambre où s'abritait l'École militaire, les brimades et les duels, les fameuses disputes sur la notion de différentielle, les discussions avec Chomé, les mauvaises perspectives de tant de tableaux, les grandes manœuvres dans les Ardennes, le réglage du tir, l'Observatoire, les longs entretiens avec Lecointe, qui en était le directeur, la réduction des coordonnées des étoiles, les lignes de visée, les ouvrages de mathématiques en usage dans les collèges et l'inspection des cours de mathématiques, la surcharge des programmes universitaires.

Cependant la fatigue vient de plus en plus vite. De plus en plus souvent le narrateur s'interrompt, en de longs silences pendant lesquels il s'assoupit. — Dans l'été de 1928, plusieurs petites congestions le frappèrent. La fin était proche. Il mourut doucement et très pieusement, le 22 juillet, âgé de soixante et onze ans.

Édouard Goedseels laisse une œuvre importante. Excellent mathématicien, il professait que la Géométrie analytique et les éléments du Calcul différentiel et intégral suffisent à la résolution de tous les problèmes qui constituent les applications des mathématiques, particulièrement à l'Astronomie et à la Géodésie. Il avait l'art de découvrir dans un problème technique les traits essen-

tiels qui permettent de donner à son énoncé une forme purement mathématique. La prédiction des phases d'une éclipse pour un lieu donné équivaut à l'étude de deux cônes dont les coordonnées polaires des axes et les ouvertures sont des fonctions connues du temps. Le problème de la photographie stellaire consiste dans une transformation de coordonnées. La question essentielle des opérations géodésiques ne diffère en rien de celle de l'intersection de deux droites. Les équations obtenues sont souvent transcendantes, d'un traitement inabordable : un développement en série rend chaque équation linéaire, à partir de solutions de première approximation, et il ne reste à parler que de celles-ci,pour lesquelles on dispose des tables numériques, des représentations graphiques, des ressources de la Nomographie.

Mais qu'on ne croie pas qu'il y eût là quelque laisser aller : ses raisonnements étaient toujours d'une rigueur extrême, et, dans les applications, où il ne peut être question de solutions exactes, il savait toujours parfaitement à quelle approximation il travaillait.

L'œuvre de Goedseels comporte des études de mathématiques pures, des travaux de mathématiques appliquées à l'Astronomie et à la Topographie, et des recherches sur le Calcul des probabilités et la Théorie des erreurs d'observation. C'est ainsi divisée qu'elle va être parcourue ici (1).

(1) La bibliographie d'Édouard Goedseels va être distribuée dans ces notes infrapaginales, à l'occasion des divers points rencontrés dans le texte. Le nombre qui précède chaque titre est le numéro d'ordre chronologique. L'abréviation S.S. signifiera *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*. — Les premiers travaux signalés dans le texte sont ceux de GÉOMÉTRIE : 1. Théorèmes de Hachette et de Chasles sur les plans tangents aux surfaces gauches, *Mathesis*, t. 3 (1883), p. 49 ; 2. Théorie des surfaces réglées précédée de la démonstration des propriétés principales des limites et des infiniment petits, Louvain, Fonteyn, 1885 ; 4. De la longueur d'une ligne, Académie r. de Belgique, *Bulletin de la Classe des sciences*, 3e série, t. 16 (1888) ; 6. Sur la détermination de la longueur des lignes courbes et de l'aire des surfaces, S.S., t. 16 (1892), p. 79 ; 7. Sur la

Le premier ouvrage important de Goedseels date de 1885. C'est un petit livre intitulé *Théorie des surfaces réglées, précédée de la démonstration des propriétés principales des limites et des infiniment petits.* L'auteur était alors sous-lieutenant, sans obligation scientifique. Il y remaniait et développait une étude publiée dans *Mathesis* deux ans auparavant. Une longue préface en fait presque un ouvrage de polémique. Pour se rendre compte de sa portée, il faut reconstituer l'atmosphère de l'époque, tout agitée de discussions sur les fondements du calcul des infiniment petits. C'est dans le même esprit que fut écrite une note sur la *longueur d'une ligne* parue en 1888 dans les Bulletins de la Classe des sciences de l'Académie royale. En dépit de leurs titres techniques, ce sont aussi des notes de Géométrie qui ont paru en 1893 dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, sur l'*appareillage des voûtes en pierre de taille* et l'*appareil hélicoïdal.*

C'est encore de la Géométrie que Goedseels a faite dans ses recherches sur la Nomographie (1). Il y a été un initiateur, en particulier dans ses *Procédés pour simplifier les calculs ramenés à l'emploi de deux transversales qui se ren-*

suppression, dans les règles générales de la Géométrie descriptive, des considérations relatives aux traces des droites et des plans, S. S., t. 17 (1893), p. 50 ; 8. Sur une modification de l'appareillage des voûtes en pierre de taille, S. S., t. 17 (1893), p. 67 ; 9. Sur l'appareil hélicoïdal, S.S. , t. 17 (1893), p. 80 ; 10. Étude du mouvement d'un corps solide, S. S. , t. 17 (1893). mém. p. 35 ; 60. Programmes d'épures du cours de Géométrie descriptive appliquée, Louvain, 1913-1914 ; 61. Questionnaire du cours de Géométrie descriptive appliquée, Louvain, 1914 ; 68. Sur les fondements de la Géométrie analytique, S.S. , t. 42 (1923), p. 63 ; 72. Rapports entre les projections axonométriques et les projections horizontales et verticales, S. S., t. 43 (1924), p. 171 ; 75. Le carré de l'hypoténuse fondement de la Géométrie analytique, S.S., t. 45 (1926), p. 51.

(1) Nomographie : 19. Les procédés pour simplifier les calculs ramenés à l'emploi de deux transversales qui se rencontrent au sein d'une graduation, Bruxelles, Lagae, 1898 ; 20. Note sur les abaques, *Revue de l'armée belge*, t. 5 ; 22. Note sur un nouveau genre d'abaques, S. S., t. 22 (1898), p. 77 ; 27. Étude sur les procédés de simplification des calculs, S. S., t. 23 (1899), mém., p. 87.

contrent au sein d'une graduation, parus d'abord en 1898, à l'époque où l'auteur était professeur à l'École de guerre, dans les *Mémoires des ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Louvain.*

Vers 1910, Édouard Goedseels fit, à l'Institut Saint-Louis de Bruxelles, des leçons de méthodologie mathématique à un groupe de professeurs de collèges épiscopaux. L'impression de ces leçons a été commencée, non achevée, et le volume qu'elles devaient faire n'a pas été publié. Il en existe 208 pages, dans lesquelles les principes de l'Arithmétique et de l'Algèbre sont exposés avec une grande rigueur et une grande clarté (1).

En 1924 parut une brochure intitulée *Nouvelle théorie des nombres imaginaires.* On se rendra compte de son originalité par les lignes suivantes qui en sont extraites : « Lorsque le dividende et le diviseur sont nuls, le produit de n'importe quel nombre réel par le diviseur est égal au dividende. L'expression (0 : 0) est donc un nombre réel arbitraire. Nous désignons ce nombre par la lettre *i*... Lorsqu'il intervient deux ou plusieurs fois dans une égalité, une question ou un raisonnement quelconque, nous convenons de lui donner partout la même valeur arbitraire. — Nous donnons le nom de *nombre imaginaire* à toute fonction algébrique du premier degré en *i*... » Toute la théorie est du reste parfaitement rigoureuse.

Vieillissant, Édouard Goedseels s'est appliqué avec un soin toujours croissant à des parties des mathématiques de plus en plus élémentaires. En 1924 il a pris l'initiative dont il convient maintenant de parler, et bien qu'elle ne constitue qu'une partie toute petite et peut-être négligeable de son œuvre, il y a lieu de s'y arrêter, à cause des critiques

(1) ENSEIGNEMENT : 5. Sur une lacune dans l'enseignement des sciences mathématiques, S.S., t. 13 (1889), p. 49 ; 67. Sur Leman et Mansion et l'analyse infinitésimale, S. S., t. 42 (1923). p. 66 ; 70. Nouvelle théorie des nombres imaginaires, Bruxelles, Stevens, 1924; 71. Arithmétique intuitive, Liége, Dessain, 1924.

dont elle a été l'objet. A cette date, Goedseels publia une brochure portant le titre général de *Cours complet de mathématiques*, le titre proprement dit d'*Arithmétique intuitive*, et l'indication : Classe de neuvième. Ceux qui l'ont critiquée l'ont-ils lue ? N'ont-ils pas dit : « Comment ce professeur de l'École militaire et de l'École de guerre, comment ce professeur d'université saurait-il la manière d'enseigner aux enfants, et aux tout petits enfants ? » — et s'en sont-ils occupés davantage ? Il faut cependant l'admirer. On ne peut ici que puiser dans l'Avertissement quelques-unes des pensées les plus chères à celui qui les a écrites : « Les auteurs de la plupart des livres élémentaires, surtout les auteurs des premiers manuels d'Arithmétique, mâchent tellement la besogne pour les lecteurs que ceux-ci ne rencontrent plus l'ombre d'une difficulté. Ce n'est pas ainsi qu'on développe les facultés des enfants... Chaque question doit présenter un obstacle, si faible soit-il, exigeant un effort personnel de la part des élèves. — En augmentant graduellement la difficulté on les rend peu à peu à même de voler de leurs propres ailes, et de montrer de l'initiative... — Pour appliquer les mathématiques à n'importe quelle question, on doit toujours commencer par énoncer avec précision le problème mathématique auquel cette question se ramène. Or, dans les manuels on apprend aux élèves à résoudre des problèmes énoncés par les auteurs, mais on ne leur propose jamais d'en énoncer et d'en résoudre eux-mêmes. Nous avons réagi en énonçant nous-même peu d'exercices, mais en proposant aux élèves d'en énoncer et d'en résoudre eux-mêmes un grand nombre d'autres ». Il y a encore la réflexion suivante qui doit être méditée par qui veut juger exactement ce petit ouvrage : « ... Si les livres destinés aux classes inférieures doivent avoir pour but principal d'enseigner les matières comprises dans les programmes de ces classes, ils doivent aussi préparer leurs lecteurs à comprendre et à s'assimiler ce qui leur sera enseigné ultérieurement. Plus d'un passage

de notre cours trouve sa justification dans cette remarque et pourrait être supprimé s'il n'avait pour but de préparer le lecteur à des études ultérieures. »

Ce grand projet d'un cours complet de mathématiques n'a commencé de se réaliser que dans cette modeste brochure pour les petits enfants. D'autres parties ont été complètement écrites : l'Arithmétique raisonnée, l'Algèbre, la Géométrie analytique...

C'est principalement dans son enseignement de l'Astronomie et de la Géodésie à l'Université de Louvain qu'Édouard Goedseels a pu montrer à quel degré il possédait l'art de ramener les problèmes de mathématiques appliquées à des problèmes de mathématiques pures. Pour lui, la seule préoccupation nécessaire était celle de cette transposition. Celle-ci accomplie, le problème était virtuellement résolu : ce n'était plus qu'une question de transformation de coordonnées ou de développement en série. Il a publié dans cet esprit un grand nombre de notes (1). Tout ne peut pas être cité ici ; mais il faut signa-

(1) Astronomie : 11. Sur la mesure du temps et le mouvement absolu, S.S., t. 18 (1894), p. 8 ; 13. Sur les formules de transformation d'Euler et leur emploi en Astronomie, S. S., t. 19 (1895), p. 58 ; 17. L'aberration de la lumière, *Annuaire de la Société belge d'Astronomie*, 1898 ; 24. Sur la généralisation des notions relatives aux coordonnées sphériques ou polaires usitées en Astronomie, S.S., t. 23 (1899), p. 33 ; 25. Remarques sur un procédé de détermination de la méridienne par l'observation de deux étoiles au moyen de la lunette méridienne, S.S., t. 23 (1899), p. 34 ; 26. Note sur la décimalisation des mesures angulaires et horaires, tables de réduction, S.S., t. 23 (1899), mém. p. 263 ; 30. Table de réduction relative à l'heure et au degré divisés décimalement, S.S., t. 24 (1900), mém. p. 105 ; 31. Décimalisation du temps et des angles, Paris, Gauthier-Villars ; 33. Remarques critiques sur certains raisonnements astronomiques, S.S., t. 24 (1900), mém., p. 254 ; 37. Sur les systèmes au repos absolu, S.S., t. 26 (1902), p. 114 ; 44. Sur l'organisation du service de l'heure de précision, S.S., t. 28 (1904), p. 168 ; 66. Sur la réduction des étoiles, S.S., t. 40 (1921), p. 72.

Instruments : 3. Sur les instruments à trois vis calantes, S.S., t. 11 (1887), p. 62 ; 15. Sur les prismes topographiques, S.S., t. 21 (1897), p. 110 ; 23. Sur le niveau à bulle, S.S., t. 22 (1898), p. 4 et t. 23 (1899).

ler la *Théorie nouvelle du niveau à bulle*, parue en 1912 dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, et surtout sa belle *Théorie des instruments visuels* insérée en 1926 dans le *Volume du cinquantenaire* de la même société. — Un instrument visuel est primaire, par définition, si la ligne de visée qu'il permet de définir est fixe ; il est binaire ou ternaire suivant que sa ligne de visée possède un ou deux degrés de liberté, et par conséquent suivant que le lieu des lignes de visée constitue une surface réglée ou une congruence de droites. — Dans la détermination de la ligne de visée définie par telle et telle coordonnées réticulaires, il y a donc à faire zéro, une ou deux lectures suivant qu'il s'agit d'un instrument primaire, binaire ou ternaire.— Dès lors le problème est le suivant. Par rapport à des axes de repère déterminés, on propose un instrument visuel, avec toutes les grandeurs qui caractérisent sa constitution et sa situation, ainsi que ses erreurs de construc-

p. 4.; 28. Étude sur les prismes à réflexions intérieures, S.S., t. 24 (1900), p. 13 ; 32. Étude sur le niveau à bulle, S. S., t. 24 (1900), mém., p. 133 ; 45. Sur le niveau à bulle, S.S., t. 28 (1904), p. 168 ; 46. L'axe optique de la lunette topographique et la ligne de visée, S.S., t. 28 (1904), p. 184 ; 47. Sur la théorie générale du vernier, S.S., t. 31 (1907), p. 95 ; 51. Sur le réglage des lunettes, des niveaux, des théodolites et des instruments astronomiques, S.S., t. 34 (1910), p. 152 ; 56. Théorie nouvelle du niveau à bulle longitudinal, S.S., t. 36 (1912), mém., p. 133; 59. Étude sur l'emploi des équerres topographiques dans les observations astronomiques et sur l'astrolabe à prisme, S.S., t. 37 (1913), mém. p. 331; 63. Sur les alidades multiples, S.S., t. 40 (1921), mém., p. 37 ; 64. Correction des erreurs systématiques, pendules et chronomètres, S.S., t. 40 (1921), p. 67 ; 77. Théorie des instruments visuels, S. S., t. 46 (1926), mém., p. 690.

Géodésie et Topographie : 21. Cours de Topographie de l'École de guerre, autogr., éd. de 1896, 1898 ; 52. Application de la théorie des erreurs de l'auteur à la compensation des coordonnées des sommets dans les levés topographiques, S.S., t. 34 (1910), mém., p. 257; 54. Carnets d'instructions, d'observations et de calculs pour les exercices de Topographie, Louvain, 1911 à 1914 ; 57. Application de la Géométrie analytique aux problèmes de Topographie, de Géodésie et d'Astronomie, problème de Snellius, dit problème de Pothenot, et problème de Hansen, S. S., t. 36 (1912), mém., p. 187 ; 69. Considérations géodésiques, S. S., t. 42 (1923), p. 231.

tion, de réglage et d'installation ; dans une observation, la ligne de visée est définie par les coordonnées réticulaires et les lectures sur les cercles gradués ; on demande les coordonnées polaires de la droite qui va de l'origine des coordonnées au point visé. Ce mémoire se termine par l'application de la théorie aux instruments méridiens.

Dans ses leçons à l'Université de Louvain, Édouard Goedseels a apporté un soin tout particulier à l'enseignement de la Cartographie. Il a publié, sur ce sujet, en 1910, un excellent ouvrage (1).

Mais c'est de ses contributions à la Théorie des erreurs d'observation qu'il convient de parler le plus longuement. Dès le début de sa carrière, il en avait la préoccupation, il y réservait une grande partie de son enseignement à l'École de guerre, et, en 1898, il publiait, en une édition autographiée, les leçons qu'il avait faites à cette école (2).

(1) Cartographie : 53. Leçons sur la Cartographie, Louvain, Peeters, 1910 ; 65. Notes de Géographie et de Topographie, S.S., t. 40 (1921), p. 71.

(2) Calcul des probabilités et Théorie des erreurs : 12. Démonstration du théorème de Bernoulli, S.S., t. 19 (1895), p. 4 ; 14. Remarques sur les valeurs des inconnues fournies par la méthode des moindres carrés, S.S., t. 21 (1897), p. 13; 16. La Théorie des erreurs et la méthode des moindres carrés, *Bulletin de la Société belge d'Astronomie*, t. 1 (1898) ; 18. Leçons sur la Théorie des erreurs données à l'École de guerre, autogr. 1898 ; 29. Simplification de la méthode dite de Tobie Mayer pour résoudre les équations de condition, S.S. t. 24 (1900), mém., p. 27 ; 34. Snr la méthode de Cauchy pour la résolution des équations linéaires considérées dans la Théorie des erreurs, S. S., t. 25 (1901), p. 99 ; 35. Seconde note sur la méthode de Cauchy, S. S., t. 25 (1901), p. 146; 36. Théorie des erreurs d'observation, Louvain, Peeters, 1902 ; 38. Sur l'application de la méthode de Cauchy aux moindres carrés, S.S., t. 26 (1902), p. 148 ; 39. Sur la vraie signification de l'erreur moyenne générale correspondant à une série d'équations linéaires, S. S., t. 27 (1903), p. 62; 40. Exposé de la Théorie des erreurs d'observation, S. S., t. 27 (1903), p. 64 ; 41. Sur une méthode nouvelle pour trouver les solutions finales les plus approchées correspondant à un système quelconque d'équations linéaires, S. S., t. 27 (1903), p. 89 ; 42. Propriété nouvelle de la méthode des moindres carrés, *Astronomische Nachrichten*, n° 3883 (1903) ; 43. Vraie signification de l'erreur moyenne, *Astronomische Nachrichten*, n° 3912 (1903) ; 48. Sur la quadruple pesée, S. S., t. 31 (1907), p. 266 ; 49. Théorie des

Dès son arrivée à l'Université de Louvain, il consacra à cette question de nombreuses séances de son cours d'Astronomie mathématique, et il saisit avec empressement l'occasion d'exposer et de défendre les idées très personnelles qu'il avait sur ce sujet en se chargeant d'enseigner le Calcul des probabilités. Aussi une deuxième édition, imprimée cette fois, de la *Théorie des erreurs d'observation* parut-elle en 1902, et une troisième en 1909. Une quatrième édition fut publiée en 1914 sous le titre de *Théorie des erreurs d'observation et Éléments du Calcul des probabilités.*

Chacune de ces éditions diffère profondément de la précédente et c'était, en réalité, chaque fois, un nouvel ouvrage que présentait l'auteur. Les progrès de sa théorie, marqués d'un autre côté par la publication de notes nombreuses, se découvrent d'un volume au suivant, et à peine l'impression de l'édition de 1902 était-elle terminée qu'une note de quelques pages devait être jointe aux exemplaires non encore distribués. Il n'est pas possible d'entrer ici dans le détail de cette évolution. On peut s'adresser tout de suite à l'édition de 1914 pour y reconnaître les principaux traits de la Théorie des erreurs suivant les vues d'Édouard Goedseels.

A la base une notion fondamentale : l'approximation des mesures. Elle est d'une extrême simplicité ; elle semble inévitable ; elle a toujours été, implicitement, familière aux praticiens ; mais un essai de Laplace et d'intéressantes

erreurs d'observation, nouv. éd., Louvain, Peeters, 1909 ; 50. De la quadruple pesée, S.S., t. 34 (1910), p. 103; 55. Simplifications de la méthode la plus approximative et de l'approximation minima, étalonnage des lunettes stadimétriques, S. S., t. 35 (1911), mém., p. 351 ; 58. Analyse d'un mémoire de Lagrange sur l'utilité de la moyenne arithmétique, S.S., t. 37 (1913), p. 69 ; 62. Théorie des erreurs d'observation et Éléments du Calcul des probabilités, Paris, Gauthier-Villars, 1914 ; 73. Exposé rigoureux de la méthode des moindres carrés, Louvain, Ceuterick, 1925 ; 74. Remarque sur les prévisions météorologiques, S.S., t. 45 (1926), p. 1. ; 76. Supplément à l'exposition rigoureuse de la méthode des moindres carrés, S.S., t. 45 (1926), p. 242.

réflexions de Gauss ne suffisent pas à nous empêcher de dire que les théoriciens ne s'en sont guère occupés. Dans leur souci de rendre les fonctions continues immédiatement applicables à la Théorie des erreurs, les mathématiciens ont édifié une doctrine où il n'y a pas de place pour la notion d'approximation. Aussi peut-on montrer les difficultés que rencontre cette doctrine. Non pas que Goedseels ait imposé à la Théorie des erreurs l'usage difficile des fonctions discontinues, mais il a eu le mérite, précisément, de montrer par quel artifice, la notion d'approximation admise et utilisée, le traitement mathématique des problèmes peut encore se faire au moyen des fonctions continues. L'application immédiate de cette notion aux équations surabondantes, rendues incompatibles par les erreurs d'observation, crée la méthode la plus approximative et son cas particulier de l'approximation minimum, à propos duquel se retrouvent certaines idées de Laplace.

Dans les circonstances extrêmement simples où il s'agit de mesures directes d'une même grandeur avec la même approximation, ces méthodes, justifiées par les principes les plus élémentaires de l'Arithmétique et de l'Algèbre, proposent, pour valeur la plus avantageuse de la grandeur mesurée, la demi-somme des mesures extrêmes.

Cette conclusion, imposée par le principe même de la méthode, a été vivement attaquée, et il est certain qu'il ne s'est trouvé aucun praticien pour s'y conformer. Cependant les conventions initiales ne sont que l'expression du bon sens, et les développements mathématiques sont simples et rigoureux. Quelle est cette contradiction ?

On a reproché à cette valeur finale de ne s'exprimer précisément qu'au moyen des deux mesures « les plus suspectes ». Mais, par hypothèse, toutes les mesures ont été faites avec la même approximation, et il n'y a pas de valeurs plus « suspectes » les unes que les autres. La valeur finale la plus approximative n'est plus la demi-somme des mesures extrêmes lorsque l'observateur

attribue des approximations différentes aux diverses observations.

Voilà pour l'objection des théoriciens. Mais la difficulté des praticiens est autrement redoutable, car, demeurée inexprimée, elle est insaisissable. C'est une répugnance insurmontable à l'adoption de cette demi-somme des valeurs extrêmes. Que font donc les praticiens ? Ils ne se décident pas à adopter une valeur finale qui ne s'exprime pas au moyen de toutes les observations ; dans le cas actuel d'observations faites avec la même précision, ils n'admettent que la moyenne arithmétique de toutes les mesures. Telle est la valeur finale qu'ils adoptent indépendamment de toute théorie. Inversement, une théorie des erreurs n'a de chance de succès auprès des praticiens que si elle considère cette valeur finale comme la plus avantageuse. C'est ce qui arrive à la méthode des moindres carrés, et c'est ce qui a fait la fortune de cette méthode.

On sait cependant combien est fragile sa justification théorique à partir du Calcul des probabilités, et combien sont peu sûres les hypothèses sur lesquelles on la fait reposer : les mathématiciens, a-t-on dit, la croient confirmée par les observations, et les physiciens s'y fient parce qu'ils la croient démontrée par les mathématiques. C'est à quoi Goedseels ne pouvait pas se résigner. Sans renoncer le moins du monde, quelle que soit l'attitude des praticiens, aux méthodes rigoureuses la plus approximative et de l'approximation minimum, mais conscient de la trop grande longueur des calculs imposés par ces méthodes dans les cas moins simples que celui qui a été indiqué tantôt, Goedseels a placé la méthode des moindres carrés sur des bases nouvelles. Il a créé une certaine fonction des résultats des observations et des approximations de ces résultats, en donnant à cette fonction le nom d'approximation quadratique. Il a défini la valeur finale la plus avantageuse comme celle pour laquelle l'approximation quadratique est minimum, et il se fait que cette valeur finale de la

méthode quadratiquement la plus approximative se confond avec la valeur finale de la méthode des moindres carrés.

Les circonstances ne lui ont pas permis de publier une cinquième édition de sa *Théorie des erreurs*, et il s'est contenté de présenter ses idées sous leur forme définitive dans une brochure parue en 1925 et intitulée *Exposé rigoureux de la méthode des moindres carrés*. Cet ouvrage a eu le plus grand succès.

Dans cette étude rapide de nombreux travaux sur les mathématiques pures et les mathématiques appliquées, il a fallu opérer un classement indépendant de l'ordre chronologique. Ce classement présente un inconvénient bien grave : il empêche d'apercevoir l'évolution si simple et si naturelle des préoccupations scientifiques d'Édouard Goedseels. Tous ses travaux n'ont été, au fond, que des applications d'une même idée, et c'est dans la possession de cette idée que consiste l'esprit mathématique. — Il en a été de sa vie comme de ses travaux : la diversité n'a été que dans les apparences. On se rappelle l'uniforme de l'officier, la redingote ou la toge du professeur, la soutane du séminariste aux cheveux blancs. Mais ce n'est pas au vêtement que se bornent les souvenirs de ceux qui l'ont bien connu : ils savent quelle a été, tout au contraire, la profonde unité spirituelle de cette longue vie.

N° 67.

Introduction de l'approximation relative dans la théorie des erreurs d'observation

par M. M. Alliaume (1)

---

1. On a mesuré n grandeurs $g_1, g_2, \ldots g_n$ liées à des inconnues finales (x, y, z) par n équations linéaires

$$a_i x + b_i y + c_i z = g_i , \qquad i = 1, 2, \ldots n,$$

dont les coefficients (a, b, c) sont connus. Soient m_i le résultat de la i^e mesure et M_i l'approximation correspondante. Enfin, si 2ϵ est la partie aliquote minimum propre aux inconnues finales, le problème essentiel de la Théorie des erreurs d'observation consiste dans la résolution du système suivant de $2n$ inéquations en (x, y, z) :

$$- M_i \leqslant a_i x + b_i y + c_i z - m_i \leqslant M_i ;$$

les *solutions possibles* (x, y, z) sont constituées des multiples de 2ϵ qui satisfont simultanément à ces inéquations.

Il faudra introduire une condition supplémentaire pour définir, parmi ces solutions possibles, la solution considérée comme *la plus avantageuse*. Ce pourra être le groupe des valeurs de (x, y, z) dont chacune est, dans son domaine (2), *la plus approximative ;* ce pourra être aussi le groupe *le plus probable*, après adoption d'une loi de probabilité des erreurs, par exemple la loi exponentielle.

Le physicien se refusera le plus souvent à prendre quelque engagement sur les valeurs des approximations M_i. Mais il dira si ces approximations M_i doivent être considérées comme égales ou inégales.

2. Si les approximations M_i doivent être considérées comme égales (ainsi qu'il arrive ordinairement dans diverses mesures d'angles avec un même instrument), le problème essentiel de la Théorie des erreurs d'observation consiste dans la résolution du système de $2n$ inéquations

$$- M \leqslant a_i x + b_i y + c_i z - m_i \leqslant M$$

où les inconnues sont maintenant au nombre de quatre : x, y, z et M. La moindre valeur de M pour laquelle les inéquations sont compatibles en (x, y, z) est l'*approximation minimum* des mesures. A chaque valeur, au moins égale à cette approximation minimum, attribuée à M, correspond un groupe de valeurs (x, y, z) dont chacune est, dans son domaine, la plus approximative ; la méthode de l'approximation minimum est celle

---

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 50 (1930), Série A, p. 9.

(2) Les méthodes de la Théorie des erreurs et les équations corrélatives, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. 43 (1924), p. 165 de la première partie.

qui adopte, pour le domaine de chacune des inconnues finales, celui qui est défini par l'approximation minimum elle-même.

Quant au groupe le plus probable, eu égard à telle approximation au moins égale à l'approximation minimum, et à telle loi de probabilité des erreurs, c'est le groupe possible dont chaque composante est la plus voisine de la composante de même rang dans le groupe pour lequel une certaine fonction des résidus

$$a_i x + b_i y + c_i z - m_i$$

passe par un minimum.

En particulier, si la loi de probabilité des erreurs est exponentielle, ce dernier groupe est celui qui rend minimum la somme des carrés des résidus, à savoir celui dont les composantes sont les racines des équations linéaires

$$\begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z &= [am]\,, \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z &= [bm]\,, \\ [ca]\,x + [cb]\,y + [cc]\,z &= [cm]\,. \end{aligned}$$

La moindre valeur de M, nécessairement au moins égale à l'approximation minimum, pour laquelle ces racines peuvent être adoptées telles quelles (chacune à une demi-partie aliquote minimum près) est la plus grande des expressions

$$\left| \frac{H_i}{\Delta} \right|$$

où

$$H_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i & m_i \\ [aa] & [ab] & [ac] & [am] \\ [ba] & [bb] & [bc] & [bm] \\ [ca] & [cb] & [cc] & [cm] \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ba] & [bb] & [bc] \\ [ca] & [cb] & [cc] \end{vmatrix};$$

c'est la moindre approximation compatible avec les résultats de la méthode des moindres carrés [1].

Pour des observations directes relatives à une seule inconnue,

$$x = m_i\,,$$

la valeur la plus approximative de x est la demi-somme des deux valeurs

[1] L'approximation des résidus dans la méthode des moindres carrés, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. 43 (1924), p. 158 de la première partie.

extrêmes m_1 et m_n, quelle que soit l'approximation, et l'approximation minimum est la demi-différence de ces deux valeurs extrêmes. Dans la même espèce d'observations, et dans l'hypothèse d'une loi exponentielle de probabilité des erreurs, la valeur la plus probable de x est la *moyenne arithmétique* de toutes les valeurs de m, et la moindre approximation compatible avec ce résultat est le plus grand des deux nombres

$$[m] / n - m_1 \qquad \text{et} \qquad m_n - [m] / n.$$

3. Si le physicien ne peut pas considérer les approximations M_i comme égales, il est généralement à même de proposer des nombres h_i qui leur soient inversement proportionnels : ce sont les *indices de précision* des observations respectives, et leurs carrés h_i^2 portent le nom de *poids* de ces observations. Si M est la valeur commune aux produits $h_i M_i$, le problème essentiel de la Théorie des erreurs consiste alors dans la résolution du système de $2n$ inéquations

$$-M \leqslant h_i(a_i x + b_i y + c_i z - m_i) \leqslant M$$

où les inconnues sont au nombre de quatre : les inconnues finales (x, y, z) et l'approximation réduite M [1]. La moindre valeur de M pour laquelle ces inéquations sont compatibles en (x, y, z) est l'*approximation réduite minimum* de l'ensemble des observations. A chaque valeur, au moins égale à cette approximation réduite minimum, attribuée à M, correspond un groupe de valeurs de (x, y, z) dont chacun est, dans son domaine, le plus approximatif ; la méthode de l'approximation minimum adopte, pour le domaine de chacune des inconnues finales, celui qui est défini par l'approximation réduite minimum elle-même.

Quant au groupe le plus probable, eu égard à telle approximation réduite au moins égale à l'approximation réduite minimum, et à telle loi de probabilité des erreurs, c'est le groupe possible dont chaque composante est la plus voisine de la composante de même rang dans le groupe pour lequel une certaine fonction des résidus passe par un minimum.

En particulier, si la loi de probabilité d'une erreur dans chaque i^e mesure est exponentielle, ce dernier groupe est celui qui rend minimum la somme des carrés des résidus, après que chacun, d'indice i, a été multiplié par l'indice de précision h_i correspondant. C'est celui dont les composantes sont les racines des équations linéaires

$$\begin{aligned}
[\alpha\alpha]\,x + [\alpha\beta]\,y + [\alpha\gamma]\,z &= [\alpha\mu]\,,\\
[\beta\alpha]\,x + [\beta\beta]\,y + [\beta\gamma]\,z &= [\beta\mu]\,,\\
[\gamma\alpha]\,x + [\gamma\beta]\,y + [\gamma\gamma]\,z &= [\gamma\mu]\,,
\end{aligned}$$

[1] La relation entre l'approximation et le poids d'une observation, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. 48 (1928), série A, p. 62 de la première partie.

où

$$\alpha_i = h_i a_i , \qquad \beta_i = h_i b_i , \qquad \gamma_i = h_i c_i , \qquad \mu_i = h_i m_i .$$

La moindre valeur de M, nécessairement égale à l'approximation réduite minimum, pour laquelle ces racines (x, y, z) peuvent être adoptées telles quelles (chacune à une demi-partie aliquote minimum près), est la plus grande des expressions

$$\left| \frac{H_i}{\Delta} \right|$$

où

$$H_i = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & \mu_i \\ [\alpha\alpha] & [\alpha\beta] & [\alpha\gamma] & [\alpha\mu] \\ [\beta\alpha] & [\beta\beta] & [\beta\gamma] & [\beta\mu] \\ [\gamma\alpha] & [\gamma\beta] & [\gamma\gamma] & [\gamma\mu] \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} [\alpha\alpha] & [\alpha\beta] & [\alpha\gamma] \\ [\beta\alpha] & [\beta\beta] & [\beta\gamma] \\ [\gamma\alpha] & [\gamma\beta] & [\gamma\gamma] \end{vmatrix} ;$$

c'est la moindre approximation réduite compatible avec les résultats de la méthode des moindres carrés (1).

Pour des observations directes relatives à une seule inconnue,

$$x = m_i ,$$

et dans l'hypothèse d'une loi exponentielle de probabilité des erreurs, la valeur la plus probable de x est la moyenne par poids des valeurs de m,

$$x = [mh^2] / [h^2] ,$$

et la moindre approximation réduite compatible avec ce résultat est le plus grand des nombres

$$h_i \left| [mh^2] / [h^2] - m_i \right| .$$

---

(1) Pour que ces résultats soient légitimes il faut avoir démontré que, dans l'expression de la loi exponentielle de probabilité P_i de l'erreur E_i,

$$\frac{dP_i}{dE_i} = \lambda_i e^{-h_i^2 E_i^2} ,$$

le coefficient de $-E_i^2$ dans l'exposant de e est bien le poids h_i^2 tel qu'il a été défini ci-dessus. Il en est bien ainsi ; en effet, d'une part, le cas actuel où ces coefficients diffèrent d'une mesure à l'autre se ramène au cas où ils sont égaux par la multiplication de l'équation d'observation n° i par la racine carrée de ce coefficient, et les choses se passent alors comme si toutes les mesures avaient été faites avec la même approximation ; d'autre part, c'est par une quantité proportionnelle à l'indice de précision h_i qu'il faut multiplier chaque inéquation d'observation pour que le système de ces inéquations se transforme dans celui que l'on écrirait pour une approximation constante.

4. Dans un grand nombre de circonstances, le physicien exprime la précision de ses mesures au moyen d'une *approximation relative* : le rapport m/g s'écarte de l'unité au plus d'une fraction qui est, généralement, telle fonction de g, et cette fonction exprime de quelle manière la sensibilité de l'instrument de mesure varie avec g. Cette fonction est généralement une fonction qui décroît indéfiniment lorsque la valeur absolue de g décroît indéfiniment, et qui tend alors vers une valeur fixe M ; par exemple

$$1 - \mathrm{M}\left(1 + \mu e^{-\nu|g|}\right) \leqslant m/g \leqslant 1 + \mathrm{M}\left(1 + \mu e^{-\nu|g|}\right),$$

où M, μ et ν sont des coefficients positifs.

Nous examinerons seulement ici le cas fréquent dans lequel les circonstances permettent de dire, qu'eu égard à l'étendue du moindre intervalle auquel appartiennent toutes les valeurs de g, et par conséquent de m, rencontrées dans la série de mesures, la sensibilité de l'instrument est pratiquement indépendante de g. Alors le second terme de la fonction de $|g|$ est négligeable vis-à-vis du premier et

$$1 - \mathrm{M} \leqslant m/g \leqslant 1 + \mathrm{M},$$

ou bien

$$-\rho \mathrm{M} g \leqslant g - m \leqslant \rho \mathrm{M} g$$

où ρ est $+1$ ou -1 suivant que g, et par conséquent m, est positif ou négatif.

C'est dans ce cas que s'introduit, à proprement parler, la notion d'approximation relative : le résultat de la mesure est exact à tant pour cent près, et c'est cette fraction qui est représentée par M.

Dans une série de n mesures indirectes effectuées en vue de la détermination de trois inconnues finales (x, y, z),

$$a_i x + b_i y + c_i z = g_i, \qquad i = 1, 2, \ldots n,$$

on a

$$-\rho \mathrm{M} g_i \leqslant g_i - m_i \leqslant \rho \mathrm{M} g_i$$

d'où

$$\frac{m_i}{1 + \rho \mathrm{M}} \leqslant a_i x + b_i y + c_i z \leqslant \frac{m_i}{1 - \rho \mathrm{M}}$$

et

$$-\rho m_i \frac{\mathrm{M}}{1 + \epsilon \mathrm{M}} \leqslant a_i x + b_i y + c_i z - m_i \leqslant \rho m_i \frac{\mathrm{M}}{1 - \epsilon \mathrm{M}},$$

où M est une constante pour toute la série d'observations ; et le problème essentiel de la Théorie des erreurs équivaut à la résolution de ce système de $2n$ inéquations aux trois inconnues (x, y, z).

Mais les deux bornes de l'intervalle auquel doit appartenir le polynome

$a_i x + b_i y + c_i z - m_i$ n'ont pas la même valeur absolue ; de sorte que les choses se passent actuellement comme si aux erreurs accidentelles s'était ajoutée une erreur systématique. On sait comment écarter cette difficulté ; cependant, ici, il est plus simple de dire que M est, par hypothèse, assez petit pour que son carré soit négligeable :

$$-\rho M m_i \leqslant a_i x + b_i y + c_i z - m_i \leqslant \rho M m_i .$$

On voit qu'on aurait immédiatement cette double inégalité, sans devoir négliger le carré de M si on introduisait l'approximation relative M de la manière suivante : le rapport g/m (et non plus m/g) s'écarte de l'unité d'une fraction au plus égale à M :

$$1 - M \leqslant g/m \leqslant 1 + M ,$$

$$-\rho M m \leqslant g - m \leqslant \rho M m ,$$

où ρ est $+1$ ou -1 suivant que m est positif ou négatif ; et, dans le cas de n mesures indirectes effectuées en vue de la détermination de trois inconnues finales,

$$-\rho M m_i \leqslant a_i x + b_i y + c_i z - m_i \leqslant \rho M m_i .$$

Cependant, le cas particulier de mesures directes, effectuées au moyen du même instrument, en vue de la détermination d'une seule inconnue x,

$$x = g$$

montre que ce point de vue n'est pas, théoriquement, admissible. Car on en déduirait

$$-\rho M m_i \leqslant x - m_i \leqslant \rho M m_i$$

et l'approximation absolue $\rho M m_i$ dépendrait du résultat m_i de la mesure, tandis qu'il est certain que cette approximation absolue est, comme g, invariable d'un bout à l'autre de la série de mesures.

5. Sauf ce cas particulier, sur lequel il y aura lieu de revenir, l'introduction de l'approximation relative dans la Théorie des erreurs consiste donc dans la substitution de $1/\rho m_i$ à h_i ; de plus, l'approximation relative n'est pas autre chose que l'approximation réduite des considérations plus générales qui précèdent. Enfin, l'*approximation relative minimum* est la moindre valeur de M pour laquelle les inéquations traitées sont compatibles.

Dans l'hypothèse d'une loi exponentielle de probabilité des erreurs, et eu égard à une valeur donnée de M, au moins égale à l'approximation relative minimum, les valeurs finales les plus probables sont celles de la méthode des moindres carrés appliquée aux équations

$$\frac{a_i}{m^i} x + \frac{b^i}{m_i} y + \frac{c_i}{m_i} z = 1 ,$$

à savoir les racines (x, y, z) du système linéaire

$$\left[\frac{aa}{m^2}\right]x+\left[\frac{ab}{m^2}\right]y+\left[\frac{ac}{m^2}\right]z=\left[\frac{a}{m}\right],$$

$$\left[\frac{ab}{m^2}\right]x+\left[\frac{bb}{m^2}\right]y+\left[\frac{bc}{m^2}\right]z=\left[\frac{b}{m}\right],$$

$$\left[\frac{ca}{m^2}\right]x+\left[\frac{cb}{m^2}\right]y+\left[\frac{cc}{m^2}\right]z=\left[\frac{c}{m}\right].$$

Quant à la moindre approximation relative M compatible avec ces valeurs finales, c'est le plus grand des nombres

$$\left|\frac{H_i}{\Delta}\right|$$

où

$$H_i=\begin{vmatrix} \frac{a_i}{m_i} & \frac{b_i}{m_i} & \frac{c_i}{m_i} & 1 \\ \left[\frac{aa}{m^2}\right] & \left[\frac{ab}{m^2}\right] & \left[\frac{ac}{m^2}\right] & \left[\frac{a}{m}\right] \\ \left[\frac{ba}{m^2}\right] & \left[\frac{bb}{m^2}\right] & \left[\frac{bc}{m^2}\right] & \left[\frac{b}{m}\right] \\ \left[\frac{ac}{m^2}\right] & \left[\frac{bc}{m^2}\right] & \left[\frac{cc}{m^2}\right] & \left[\frac{c}{m}\right] \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta=\begin{vmatrix} \left[\frac{aa}{m^2}\right] & \left[\frac{ab}{m^2}\right] & \left[\frac{ac}{m^2}\right] \\ \left[\frac{ba}{m^2}\right] & \left[\frac{bb}{m^2}\right] & \left[\frac{bc}{m^2}\right] \\ \left[\frac{ca}{m^2}\right] & \left[\frac{cb}{m^2}\right] & \left[\frac{cc}{m^2}\right] \end{vmatrix}.$$

6. Dans la détermination d'une seule inconnue, au moyen de mesures exprimées par des équations de la forme

$$a_i x = m_i\,,$$

la valeur finale de x est celle qui annule la somme des carrés des résidus

$$\frac{a_i}{m_i}x-1,$$

à savoir

$$x=\left[\frac{a}{m}\right]\Big/\left[\frac{a^2}{m^2}\right],$$

et la moindre approximation relative compatible avec ce résultat est le plus grand des nombres

$$\left| \frac{a}{m_i}\left[\frac{a}{m}\right] \Big/ \left[\frac{a^2}{m^2}\right] - 1 \right| .$$

Note sur la théorie du théodolite

par M. M. Alliaume (1)

En 1925, j'ai publié dans les *Annales des travaux publics de Belgique* (t. 26, pp. 839-930) un mémoire sur *La triangulation topographique*, qui a été reproduit dans les *Publications du laboratoire d'Astronomie et de Géodésie de l'Université de Louvain* (t. 2, 1925, pp. 175-266).

Le premier chapitre de ce mémoire est intitulé *Théorie nouvelle du théodolite*. Or, en laissant à cette théorie l'esprit dans lequel elle a été faite, il est possible de modifier son exposé de manière à y introduire des améliorations appréciables. C'est ce que je voudrais faire ici. On m'excusera d'emprunter à peu près à la rédaction primitive deux ou trois pages d'introduction nécessaires, sans changements, à la partie nouvelle de cet exposé.

I. — PRINCIPES ET APPROXIMATION

Théoriquement, le théodolite est la réalisation matérielle d'un système de coordonnées horizontales. Si cet instrument était parfaitement construit, réglé, installé et utilisé, les lectures L et l, respectivement sur le cercle horizontal et sur le cercle vertical, seraient l'azimut et la hauteur de la ligne de visée définie par le point d'intersection des fils réticulaires principaux. Il n'en est pas tout-à-fait ainsi, par suite des défauts inhérents à la construction de l'instrument, de l'imperfection de son réglage et des erreurs inévitables d'installation et d'observation.

En vue des applications topographiques du théodolite, on peut admettre :

1° que la ligne de visée et l'axe de rotation, théoriquement horizontal, de la lunette sont deux droites concourantes ;

(1) Union des Ingénieurs sortis des Écoles Spéciales de Louvain, 1930, n° 2, p. 67.

2° qu'il en est de même de l'axe de rotation de la lunette et du pivot, théoriquement vertical, de l'instrument.

Admettre ces hypothèses simplificatrices équivaut à considérer les plus courtes distances de ces droites, deux à deux, comme n'intervenant que dans des termes négligeables à l'approximation à laquelle le théodolite va être étudié.

Les défauts non négligeables de construction et de réglage sont :

1° la collimation *c*, inclinaison de la ligne de visée sur le plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la lunette ;

2° l'erreur *w* du zéro du cercle vertical, angle de pente ou distance zénithale du rayon initial de la graduation de ce cercle, suivant que la chiffraison a été gravée en vue de la mesure des angles de pente ou en vue de la mesure des distances zénithales ;

3° l'inclinaison *i*, définie de manière à être voisine de zéro, de l'axe de rotation de la lunette sur le plan perpendiculaire au pivot de l'instrument ;

4° l'excentricité E de la ligne de visée, moindre distance entre celle-ci et le pivot de l'instrument.

Les erreurs d'installation du théodolite par rapport aux axes horizontaux théoriques sont :

1° l'erreur W d'orientation du cercle des azimuts, azimut du rayon initial de la graduation de ce cercle, sur lequel la rotation positive du théodolite est, par hypothèse, droitière ou gauchère suivant que les axes de coordonnées constituent un système droitier ou un système gaucher ;

2° l'obliquité I, définie de manière à être voisine de zéro, de l'axe du pivot sur la verticale ;

et l'influence de cette dernière erreur dépend de la valeur B de l'azimut du plan vertical auquel appartient le pivot de l'instrument.

Nous supposerons le cercle vertical chiffré en vue de la mesure des angles de pente : le rayon initial de sa graduation correspond à une ligne de visée théoriquement horizontale.

Le centre O du théodolite est, par définition, le point d'intersection du pivot de l'instrument et de l'axe de rotation de la lunette. Le point visé M appartient à la ligne de visée. L'azimut A et l'angle de pente *p* de la droite OM, orientée de manière que le segment

$$\rho = OM$$

soit positif, sont des fonctions de

$$L,\ l,\ c,\ w,\ i,\ E,\ W,\ I,\ B,\ \rho.$$

Ces expressions doivent être homogènes, et chacun de leurs termes sera de dimensions nulles, comme le sont A et p : en particulier, les longueurs E et ρ n'y entreront que par leur rapport

$$\epsilon = \frac{E}{\rho}.$$

Le rapport ϵ est une quantité petite, du même ordre que les mesures des petits angles c, w, i, I, W, avec le radian pour unité. A ce rapport et à ces mesures d'angles, attribuons le premier ordre de petitesse, et définissons l'approximation à laquelle va être faite la théorie du théodolite en convenant de considérer comme négligeables les quantités petites du deuxième ordre, carrés et produits deux à deux de quantités petites du premier ordre.

Dès lors, chacune des expressions

$$A = F\ (L,\ l,\ c,\ w,\ i,\ \epsilon,\ W,\ I),$$
$$p = f\ (L,\ l,\ c,\ w,\ i,\ \epsilon,\ W,\ I)$$

pourra se développer en série suivant les puissances croissantes des quantités petites c, w, i, ϵ, W, I, et il sera légitime de limiter ces développements aux termes du premier degré.

Dans le développement de A, le terme constant sera

$$F\ (L,\ l,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

c'est-à-dire la fonction de L et de l à laquelle se réduirait l'azimut A de la droite OM si l'instrument était parfaitement construit, réglé et installé : c'est la lecture L sur le cercle horizontal.

De même, le terme constant

$$f\ (L,\ l,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

du développement de p est la lecture l sur le cercle vertical.

Les développements annoncés sont donc de la forme

$$A = L + c\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_0 + w\left(\frac{\partial A}{\partial w}\right)_0 + i\left(\frac{\partial A}{\partial i}\right)_0 + \epsilon\left(\frac{\partial A}{\partial \epsilon}\right)_0 + W\left(\frac{\partial A}{\partial W}\right)_0 + I\left(\frac{\partial A}{\partial I}\right)_0,$$

$$p = l + c\left(\frac{\partial p}{\partial c}\right)_0 + w\left(\frac{\partial p}{\partial w}\right)_0 + i\left(\frac{\partial p}{\partial i}\right)_0 + \epsilon\left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon}\right)_0 + W\left(\frac{\partial p}{\partial W}\right)_0 + I\left(\frac{\partial p}{\partial I}\right)_0,$$

où $\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_0$, par exemple, représente la dérivée partielle de la fonction F par rapport à c, dans laquelle dérivée on a donné aux six paramètres (c, w, i, ϵ, W, I) la valeur 0.

Or, on peut aussi bien calculer le coefficient $\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_0$ de la manière suivante : annuler ces paramètres dans la fonction F, sauf le seul paramètre c ; calculer la dérivée par rapport à c de la fonction de c ainsi obtenue ; dans cette dérivée remplacer c par zéro. Ceci tient à ce que, par hypothèse, F est une fonction linéaire de ces six paramètres.

Le même raisonnement est valable pour le coefficient $\left(\frac{\partial p}{\partial c}\right)_0$ de c dans la fonction p ou f. Il en résulte que les coefficients de c dans les deux fonctions A et p pourront se calculer en supposant nulles toutes les erreurs du théodolite, sauf la collimation.

Il en est de même des coefficients des autres paramètres, et nous chercherons séparément le coefficient de chacun des termes des fonctions A et p en considérant comme nulles toutes les erreurs de construction, de réglage et d'installation de l'instrument, sauf, successivement, chacune d'elles.

II. — ERREURS DE CONSTRUCTION ET DE RÉGLAGE

1. **Collimation.** — L'origine O des coordonnées x y z est le centre de l'instrument, point commun au pivot et à l'axe de rotation de la lunette, censé appartenir aussi, dans l'hypothèse actuelle de la seule erreur de collimation, à la ligne de visée V (fig. 1). En vertu de cette même hypothèse, le pivot est vertical ; il appartient à l'axe des z, et celui-ci est orienté positivement vers le zénith. L'axe de rotation a de la lunette appartient à une droite dirigée positivement vers la droite ou vers la gauche de l'opérateur suivant que la rotation du théodolite autour du pivot est positive de gauche à droite ou de droite à gauche, c'est-à-dire, en même temps, suivant que le système x y z des axes de coordonnées constitue un système droitier ou un système gaucher ; les coordonnées polaires de l'axe de rotation a sont (L + 1 droit, 0).

C'est à cause de la collimation que la ligne de visée V, dont les

coordonnées polaires sont (A, p), n'appartient pas au plan passant par le centre et perpendiculaire à a : soit V′ la projection de la ligne de visée sur ce plan : cette projection est orientée de façon que l'angle (V′V) soit un angle voisin de zéro. Cet angle est la collimation c, mesurée de V′ vers V, positivement dans le sens pour lequel l'angle

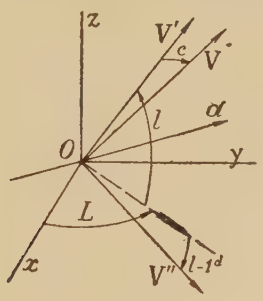


Fig. 1.

(V′a) est égal à un droit, c'est-à-dire vers la droite ou vers la gauche de l'opérateur suivant que la rotation positive par rapport au cercle horizontal est droitière ou gauchère. La droite V′ a pour coordonnées les lectures L et l sur le cercle horizontal et sur le cercle vertical. Enfin, la perpendiculaire V″ au plan VV′ a, dans l'un de ses sens, des coordonnées polaires (L, l — 1 droit).

Nous chercherons deux relations entre (A, p, L, l, c), relations d'où nous puissions tirer A et p en fonction de (L, l, c). Nous les obtiendrons en écrivant que la ligne de visée fait tels angles connus avec deux directions dont les coordonnées polaires s'expriment au moyen des lectures L et l :

1° l'angle (VV″) est égal à un droit, ou

$$-\sin p \cos l + \cos p \sin l \cos(A - L) = 0 ;$$

2° l'angle (aV) est égal à (1 droit — c), ou

$$\cos p \sin(A - L) = \sin c.$$

Dans ces deux équations, A et p sont des fonctions de c. En les dérivant par rapport à c, on obtient

$$-\cos p \cos l \frac{\partial p}{\partial c} + \sin p \sin l \cos(A - L)\frac{\partial p}{\partial c} - \cos p \sin l \sin(A - L)\frac{\partial A}{\partial c} = 0,$$

$$-\sin p \sin(A - L)\frac{\partial p}{\partial c} + \cos p \cos(A - L)\frac{\partial A}{\partial c} = \cos c,$$

système de deux équations aux deux inconnues $\left(\frac{\partial A}{\partial c}, \frac{\partial p}{\partial c}\right)$. Les valeurs

de ces deux inconnues qu'on en tirerait sont les dérivées partielles par rapport à c des fonctions A et p dans lesquelles on aurait annulé les six paramètres, sauf c. Il reste à y faire $c = 0$ pour obtenir $\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial p}{\partial c}\right)_0$. Or, à $c = 0$ correspond $A = L$ et $p = l$. Dans ce cas particulier, les équations ci-dessus se réduisent à

$$\begin{cases} -\cos^2 l \left(\frac{\partial p}{\partial c}\right)_0 - \sin^2 l \left(\frac{\partial p}{\partial c}\right)_0 = 0, \\ \cos l \left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_0 = 1, \end{cases}$$

d'où

$$\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_0 = \frac{1}{\cos l}, \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial c}\right)_0 = 0. \tag{1}$$

2. **Erreur du zéro du cercle vertical.** — Cette erreur, qui n'affecte que l'angle de pente, est l'angle de pente w de la ligne de visée lorsque la lecture l au cercle vertical est nulle. Si cette erreur était la seule, on aurait

$$A = L, \qquad p = l + w,$$

d'où

$$\left(\frac{\partial A}{\partial w}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial w}\right)_0 = 1. \tag{2}$$

3. — **Inclinaison de l'axe de rotation de la lunette.** — L'axe de rotation a de la lunette n'appartient pas au plan horizontal des xy (fig. 2), et cette erreur est la seule qu'il faille actuellement considérer. Les axes de coordonnées sont ceux qui ont été définis ci-dessus. Soit a' la projection de l'axe a sur le plan des xy, orientée positivement vers la droite ou vers la gauche de l'observateur suivant que l'instrument est droitier ou gaucher. L'axe de rotation a lui-même est orienté de façon que son sens positif fasse un angle voisin de zéro (et non de deux droits) avec le sens positif de a'. Cet angle $(a'a)$, ou inclinaison i, est mesuré de a' vers a, dans un sens tel que l'angle $(a'z)$ vaille un droit. Le plan perpendiculaire à a renferme la ligne de visée V, dont les coordonnées polaires sont (A, p), et coupe le plan des xy suivant une droite V' dont l'un des sens a les coordonnées polaires (L, 0). C'est à partir de ce sens que l'angle (V'V) est égal à la lecture l sur le cercle vertical.

Pour obtenir les deux relations nécessaires en (A, p, L, l, i), exprimons

1° que l'angle (Va) est égal à un droit,

$$\sin p \sin i + \cos p \cos i \sin (A - L) = 0 ;$$

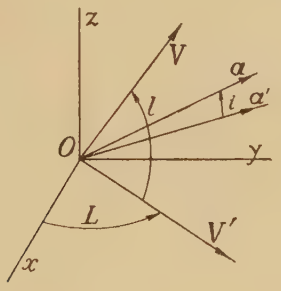


Fig. 2.

2° que l'angle (V'V) est égal à l,

$$\cos p \cos (A - L) = \cos l.$$

Dans ces deux équations, A et p sont des fonctions de i. En les dérivant par rapport à i, on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\cos p \sin i \frac{\partial p}{\partial i} + \sin p \cos i - \sin p \cos i \sin (A - L) \frac{\partial p}{\partial i} \\ &- \cos p \sin i \sin (A - L) + \cos p \cos i \cos (A - L) \frac{\partial A}{\partial i} = 0, \\ &- \sin p \cos (A - L) \frac{\partial p}{\partial i} - \cos p \sin (A - L) \frac{\partial A}{\partial i} = 0, \end{aligned}\right\}$$

système de deux équations aux deux inconnues $\left(\frac{\partial A}{\partial i}, \frac{\partial p}{\partial i}\right)$. Les valeurs de ces deux inconnues qu'on en tirerait sont les dérivées par rapport à i des fonctions A et p dans lesquelles on aurait annulé les six paramètres, sauf i. Il reste à y faire $i = 0$, et par conséquent $A = L$ et $p = l$, pour obtenir $\left(\frac{\partial A}{\partial i}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial p}{\partial i}\right)_0$:

$$\left\{\begin{aligned} &\sin l + \cos l \left(\frac{\partial A}{\partial i}\right)_0 = 0, \\ &- \sin l \left(\frac{\partial p}{\partial i}\right)_0 = 0, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\left(\frac{\partial A}{\partial i}\right)_0 = - \operatorname{tg} l, \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial i}\right)_0 = 0. \tag{3}$$

4. **Excentricité.** — Nous conservons les mêmes axes de coordonnées, et l'axe de rotation a de la lunette, situé par hypothèse dans le plan des xy, a le même sens positif que dans l'étude de la collimation ; mais (fig. 3) le point d'intersection O′ de la ligne de visée V

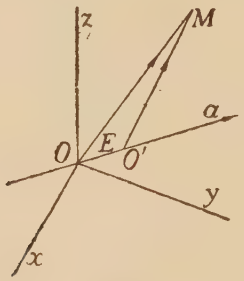


Fig. 3.

et de l'axe a a, le long de celui-ci, une abscisse E susceptible, par conséquent, de signe : elle est positive lorsque la lunette est, par rapport au centre de l'instrument, à la droite ou à la gauche de l'opérateur suivant que le théodolite est droitier ou gaucher.

Soient M le point visé et ρ la distance OM. La direction OM a des coordonnées polaires (A, p).

Soit encore ρ′ la distance O′M. La ligne de visée O′M a des coordonnées polaires (L, l).

Les cosinus directeurs des trois droites O′M, OM et a sont :

OM...	cos A cos p,	sin A cos p,	sin p
O′M...	cos L cos l,	sin L cos l,	sin l
a ...	— sin L,	cos L,	0

Exprimons que, sur chacun des trois axes de coordonnées, la projection du contour OO′M est égale à la projection de sa résultante OM :

axe des x... $\rho \cos A \cos p = -E \sin L + \rho' \cos L \cos l$

axe des y... $\rho \sin A \cos p = E \cos L + \rho' \sin L \cos l$

axe des z... $\rho \sin p = \rho' \sin l$

ou

$$\cos a \cos p = -\epsilon \sin L + \frac{\rho'}{\rho} \cos L \cos l,$$

$$\sin a \cos p = \epsilon \cos L + \frac{\rho'}{\rho} \sin L \cos l,$$

$$\sin p = \frac{\rho'}{\rho} \sin l.$$

Dans ces trois équations, $\frac{\rho'}{\rho}$, A et p sont des fonctions de ϵ. En les dérivant par rapport à ϵ, on obtient

$$-\sin A \cos p \frac{\partial A}{\partial \epsilon} - \cos A \sin p \frac{\partial p}{\partial \epsilon} = -\sin L + \frac{\partial}{\partial \epsilon}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) \cos L \cos l,$$

$$\cos A \cos p \frac{\partial A}{\partial \epsilon} - \sin A \sin p \frac{\partial p}{\partial \epsilon} = \cos L + \frac{\partial}{\partial \epsilon}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) \sin L \cos l,$$

$$\cos p \frac{\partial p}{\partial \epsilon} = \frac{\partial}{\partial \epsilon}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) \sin l,$$

système de trois équations linéaires aux trois inconnues $\frac{\partial}{\partial \epsilon}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)$, $\frac{\partial A}{\partial \epsilon}$, $\frac{\partial p}{\partial \epsilon}$. Les valeurs de ces trois inconnues qu'on en tirerait sont les dérivées par rapport à ϵ des fonctions ρ'/ρ, A et p dans lesquelles on aurait annulé les six paramètres, sauf ϵ. Il reste à y faire $\epsilon = 0$, et par conséquent $A = L$, $p = l$, pour obtenir $\left(\frac{\partial}{\partial \epsilon}\frac{\rho'}{\rho}\right)_0$, $\left(\frac{\partial A}{\partial \epsilon}\right)_0$, $\left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon}\right)_0$:

$$-\sin L \cos l \left(\frac{\partial A}{\partial \epsilon}\right)_0 - \cos L \sin l \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon}\right)_0 = -\sin L \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon}\frac{\rho'}{\rho}\right)_0 \cos L \cos l,$$

$$\cos L \cos l \left(\frac{\partial A}{\partial \epsilon}\right)_0 - \sin L \sin l \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon}\right)_0 = \cos L \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon}\frac{\rho'}{\rho}\right)_0 \sin L \cos l,$$

$$\cos l \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon}\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon}\frac{\rho'}{\rho}\right)_0 \sin l,$$

d'où

$$\left(\frac{\partial}{\partial \epsilon}\frac{\rho'}{\rho}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial A}{\partial \epsilon}\right)_0 = \sec l, \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon}\right)_0 = 0. \qquad (4)$$

III. — ERREURS D'INSTALLATION

1. Les axes théoriques de coordonnées sont OXYZ, tandis que les axes instrumentaux *Oxyz*, par rapport auxquels les coordonnées polaires (A, p) ont été mesurées jusqu'ici, ont, avec la même origine, des orientations légèrement différentes caractérisées par les quantités petites W, I et l'azimut B. Les formules de passage de l'un à l'autre de deux pareils systèmes sont de la forme

$$X = a_1 x + a_2 y + a_3 z,$$
$$Y = b_1 x + b_2 y + b_3 z,$$
$$Z = c_1 x + c_2 y + c_3 z,$$

où les constantes (a_1, b_1, ..., c_3) sont trois à trois (moyennant les

mêmes indices) les cosinus directeurs des axes $Oxyz$ par rapport au système OXYZ. De ces neuf constantes trois seulement sont indépendantes, liées qu'elles sont par six relations, dont trois expriment que ce sont les cosinus directeurs de trois directions et dont les trois autres expriment la perpendicularité de ces trois directions deux à deux.

Mais ici les deux systèmes d'axes sont voisins : les angles (Xx), (Yy), (Zz) sont petits, et les carrés et produits deux à deux de leurs mesures en radians sont négligeables. Les cosinus (a_1, b_2, c_3) de ces angles sont assimilables à l'unité, et à la même approximation

$$\begin{aligned} a_2 + b_1 &= 0 , \\ b_3 + c_2 &= 0 , \\ a_3 + c_1 &= 0 . \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} b_3 = -c_2 &= \alpha , \\ c_1 = -a_3 &= \beta , \\ a_2 = -b_1 &= \gamma , \end{aligned}$$

(α, β, γ) sont des paramètres indépendants au moyen desquels les formules de passage de l'un à l'autre des deux systèmes voisins s'écrivent

$$\begin{aligned} X &= x + \gamma y - \beta z , \\ Y &= -\gamma x + y + \alpha z , \\ Z &= \beta x - \alpha y + z . \end{aligned}$$

2. Dans l'installation imparfaite du théodolite, le pivot est incliné sur la verticale d'un petit angle I, dans un azimut B. Avec, pour origine, le centre de l'instrument, l'axe théorique des Z appartient à la verticale et est orienté positivement vers le zénith ; les axes des X et des Y ont des orientations déterminées dans le plan horizontal, et constituent un système droitier ou gaucher, comme les axes instrumentaux des xy, suivant que les lectures au cercle des azimuts vont en croissant pour une rotation du théodolite autour du pivot de gauche à droite ou de droite à gauche.

W, erreur d'orientation du cercle des azimuts, est le petit angle que fait avec l'axe des X la projection de l'axe des x sur le plan XY ; c'est donc l'angle de position de l'axe des x dans le système OXYZ. Pour trouver l'angle de pente h de cet axe des x dans le même

système, exprimons que l'axe des x et l'axe des z sont perpendiculaires :

$$\sin h \cos \mathrm{I} + \cos h \sin \mathrm{I} \cos (\mathrm{B} - \mathrm{W}) = 0,$$

d'où, à l'approximation actuelle, à laquelle le carré de I est négligeable,

$$h = - \mathrm{I} \cos (\mathrm{B} - \mathrm{W}).$$

Cela étant,

$$\alpha = b_3 = \cos (\mathrm{Y}z) = \sin \mathrm{I} \sin \mathrm{B} \quad \text{ou} \quad \mathrm{I} \sin \mathrm{B},$$

$$\beta = - a_3 = - \cos (\mathrm{X}z) = - \sin \mathrm{I} \cos \mathrm{B} \quad \text{ou} \quad - \mathrm{I} \cos \mathrm{B},$$

$$\gamma = - b_1 = - \cos (\mathrm{Y}z) = - \sin \mathrm{W} \cos h \quad \text{ou} \quad - \mathrm{W},$$

et les formules de transformation sont

$$\mathrm{X} = x - \mathrm{W} \cdot y + \mathrm{I} \cos \mathrm{B} \cdot z,$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{W} \cdot x + y + \mathrm{I} \sin \mathrm{B} \cdot z,$$

$$\mathrm{Z} = - \mathrm{I} \cos \mathrm{B} \cdot x - \mathrm{I} \sin \mathrm{B} \cdot y + z,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\begin{cases} \cos \mathrm{A} \cos p = \cos \mathrm{L} \cos l - \mathrm{W} \sin \mathrm{L} \cos l + \mathrm{I} \cos \mathrm{B} \sin l, \\ \sin \mathrm{A} \cos p = \mathrm{W} \cos \mathrm{L} \cos l + \sin \mathrm{L} \cos l + \mathrm{I} \sin \mathrm{B} \sin l, \\ \sin p = - \mathrm{I} \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{L} \cos l - \mathrm{I} \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{L} \cos l + \sin l. \end{cases}$$

Dans ces équations, A et p sont des fonctions de W et de I. En les dérivant par rapport à W, on obtient

$$\begin{cases} - \sin \mathrm{A} \cos p \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{W}} - \cos \mathrm{A} \sin p \dfrac{\partial p}{\partial \mathrm{W}} = - \sin \mathrm{L} \cos l, \\ \cos \mathrm{A} \cos p \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{W}} - \sin \mathrm{A} \sin p \dfrac{\partial p}{\partial \mathrm{W}} = - \cos \mathrm{L} \cos l, \\ \cos p \dfrac{\partial p}{\partial \mathrm{W}} = 0 ; \end{cases}$$

et, en les dérivant par rapport à I,

$$\begin{cases} - \sin \mathrm{A} \cos p \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{I}} - \cos \mathrm{A} \sin p \dfrac{\partial p}{\partial \mathrm{I}} = \cos \mathrm{B} \sin l, \\ \cos \mathrm{A} \cos p \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{I}} - \sin \mathrm{A} \sin p \dfrac{\partial p}{\partial \mathrm{I}} = \sin \mathrm{B} \sin l, \\ \cos p \dfrac{\partial p}{\partial \mathrm{I}} = - \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{L} \cos l - \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{L} \cos l. \end{cases}$$

Chacun de ces groupes d'égalités est un système de trois équations linéaires à deux inconnues, nécessairement compatibles à l'approximation actuelle : le premier aux deux inconnues $\left(\dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{W}}, \dfrac{\partial p}{\partial \mathrm{W}}\right)$,

le second aux deux inconnues $\left(\frac{\partial A}{\partial I}, \frac{\partial p}{\partial I}\right)$. Les valeurs de ces inconnues qu'on en tirerait sont les dérivées, par rapport à W, puis par rapport à I, des fonctions A et p, dans lesquelles on aurait annulé les six paramètres sauf un, à savoir, respectivement, d'abord W, puis I. Il reste à faire, dans le premier système $W = 0$, et dans le deuxième système $I = 0$, et par conséquent, chaque fois, $A = L$ et $p = l$, pour obtenir $\left(\frac{\partial A}{\partial W}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial p}{\partial W}\right)_0$, puis $\left(\frac{\partial A}{\partial I}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial p}{\partial I}\right)_0$:

$$\left\{\begin{array}{l} -\sin L \cos l \left(\frac{\partial A}{\partial W}\right)_0 - \cos L \sin l \left(\frac{\partial p}{\partial W}\right)_0 = -\sin L \cos l, \\ \cos L \cos l \left(\frac{\partial A}{\partial W}\right)_0 - \sin L \sin l \left(\frac{\partial p}{\partial W}\right)_0 = \cos L \cos l, \\ \cos l \left(\frac{\partial p}{\partial W}\right)_0 = 0 \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} -\sin L \cos l \left(\frac{\partial A}{\partial I}\right)_0 - \sin L \sin l \left(\frac{\partial p}{\partial I}\right)_0 = \cos B \sin l, \\ \cos L \cos l \left(\frac{\partial A}{\partial I}\right)_0 - \sin L \sin l \left(\frac{\partial p}{\partial I}\right)_0 = \sin B \sin l, \\ \cos l \left(\frac{\partial p}{\partial I}\right)_0 = -\cos B \cos L \cos l - \sin B \sin L \cos l, \end{array}\right.$$

d'où

$$\left(\frac{\partial A}{\partial W}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial W}\right)_0 = 0 \qquad (5)$$

et

$$\left(\frac{\partial A}{\partial I}\right)_0 = -\operatorname{tg} l \sin (L - B), \quad \left(\frac{\partial p}{\partial I}\right)_0 = -\cos (L - B). \qquad (6)$$

3. Ainsi, d'après les valeurs obtenues de (1) à (6), les formules de réduction des observations au théodolite, eu égard à la fois aux erreurs de construction, de réglage et d'installation, sont

$$A = L + W + [c + \epsilon - i \sin l - I \sin l \sin (L - B)] \sec l,$$
$$p = l + w - I \cos (L - B).$$

Dans les applications topographiques du théodolite, l'usage attentif d'un bon niveau solidaire du pivot, autour duquel, pour une configuration déterminée du dispositif de réglage, il ne peut que tourner, permet d'installer l'instrument de façon que l'angle I soit,

exprimé en radians, une quantité petite du deuxième ordre, c'est-à-dire, ici, négligeable.

De la même manière, la manœuvre, suivant le procédé connu, du dispositif de réglage de l'axe de rotation de la lunette permet de négliger le terme en i.

Il en résulte que, dans la pratique courante, pour un théodolite dont, éventuellement, la lunette est excentrique,

$$A = L + W + (c + \epsilon) \text{ séc } l,$$
$$p = l + w.$$

Supposons un changement d'orientation quelconque, non nécessairement petit, des axes instrumentaux horizontaux des xy par rapport aux axes horizontaux théoriques XY, moyennant le même axe des z, ou des Z, et la même origine pour les deux systèmes.

Ce changement d'orientation n'affecte pas les angles de pente, et les azimuts des diverses lignes de visée sont modifiés, quels que soient les angles de pente, de la même quantité, à savoir la mesure du décalage des deux couples d'axes horizontaux. Ainsi les formules ci-dessus restent valables lorsque l'erreur W du cercle horizontal est, plutôt que petite, quelconque.

Enfin, on connaît la manière de se débarrasser, si la lunette est excentrique, du terme d'excentricité ϵ séc l : il suffit de viser, de la même station, deux fois le même point, lunette à droite et lunette à gauche. Après ces deux observations et les lectures L_1 et L_2, (corrigée de 180°) sur le cercle horizontal,

$$A = L_1 + W + (c + \epsilon) \text{ séc } l,$$
$$A = L_2 + W + (c - \epsilon) \text{ séc } l,$$

d'où, par addition,

$$A = \frac{L_1}{2} \frac{L_2}{} W + \frac{c}{\cos l}.$$

Plus simplement, lorsque les circonstances s'y prêtent, en particulier lorsque les visées se font sur le voyant d'une mire, il suffira de viser un point marqué sur le voyant, en dehors du centre, à une distance de celui-ci égale à l'excentricité E, à droite ou à gauche, suivant que la lunette est excentrique à droite ou à gauche ; on aura recommandé au porte-mire d'orienter la mire de façon que le voyant soit sensiblement perpendiculaire au plan vertical de la ligne de visée.

En résumé, un bon théodolite, utilisé avec soin, peut se traiter par les formules simplifiées

$$A = L + W + \frac{c}{\cos l},$$
$$p = l + w.$$

4. Jusqu'ici, le cercle vertical a été supposé chiffré de façon que les lectures l y soient, théoriquement, les angles de pente p des lignes de visée. Ce cercle est souvent chiffré de façon que les lectures l soient, théoriquement, les distances zénithales d des lignes de visée. Dans ce cas, l'erreur w du zéro du cercle vertical est la distance zénithale, voisine de zéro, du rayon initial de ce cercle lorsque la lecture est $l = 0$. Dans les formules obtenues par la théorie précédente, l doit être remplacé par son complément et p par (1 droit $- d$); les formules complètes sont

$$A = L \quad W \quad [c \quad \epsilon - i \cos l - I \cos l \sin (L - B)] \operatorname{cosec} l,$$
$$d = l + w \quad I \cos (L - B),$$

et, en vue de la pratique, les formules réduites s'écrivent

$$A = L + W \quad \frac{c}{\sin l},$$
$$d = l + w.$$

5. C'est dans l'esprit de ces considérations théoriques et pratiques qu'ont été rédigées les instructions pour les exercices de Topographie aux Écoles spéciales de l'Université de Louvain. Une partie de ces instructions comporte le réglage du théodolite, c'est-à-dire l'annulation des erreurs de collimation et du zéro du cercle vertical.

La planète transneptunienne

par M. M. Alliaume (1)

I. — *L'ÉVÉNEMENT.*

L'*Union astronomique internationale* a confié à l'Observatoire de Copenhague le service de la distribution rapide des nouvelles astronomiques. La circulaire du 14 mars 1930 devait faire sensation; en voici la reproduction, dans la partie qui nous intéresse :

Circulaire N° 255

Bureau central astronomique
de l'Union astronomique internationale.
Observatoire de Copenhague.

TRANSNEPTUNIAN PLANET?

We received from Prof. *Shapley* the following telegram: « Lowell observatory telegraphs systematic search begun years ago supplementing Lowells investigations for transneptunian planet has revealed object which for seven weeks has in rate of motion and path consistently conformed to transneptunian body at approximate distance he assigned fifteenth magnitude position march twelve three hours G. M. T. was seven seconds of time west from delta geminorum agreeing with Lowells predicted longitude *Shapley.* »

1930 March 14. *Elis Strömgren.*

Ainsi le 13 mars, M. H. Shapley, directeur de l'Observatoire du Harvard College, au nom de l'Observatoire Lowell, à Flagstaff, dans l'Arizona, annonçait la découverte d'un corps céleste dont le mouvement par rapport aux étoiles était observé depuis sept semaines; c'est un astre de la quinzième grandeur qui, le 12 mars, à 3 heures, temps moyen de Greenwich, se trouvait à 1'45" à l'ouest de l'étoile δ de la constellation des Gémeaux (figure 1); il y a tout lieu de croire qu'il s'agit d'une planète dont l'orbite est extérieure à l'orbite de Neptune, et les

(1) Ciel et Terre, t. 46 (1930).

premières observations permettent de l'identifier avec la planète transneptunienne dont la Mécanique céleste a permis à Percival Lowell de prévoir l'existence.

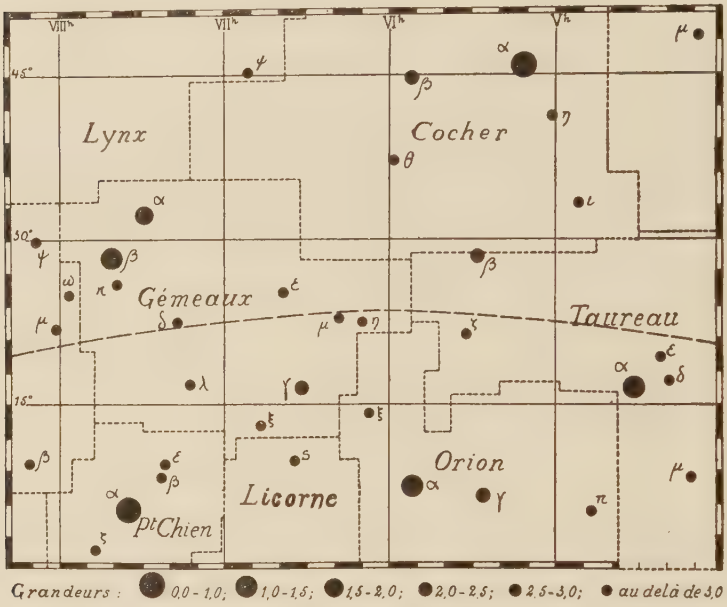


Fig. 1. — Carte des Gémeaux et des constellations voisines, en projection plate carrée à partir de l'équateur. La planète nouvelle a été observée près de δ Gémeaux, asc. dr. 7 h. 29 m. 11 s., décl. + 22° 8' 23", grandeur 3,7. Les étoiles figurées sur cette carte sont celles du *Petit Atlas céleste* de M. G. Bigourdan, 1920. Les frontières des constellations, formées d'arcs de méridiens et de parallèles, ont été tracées d'après l'ouvrage récent de M. É. Delporte: *Délimitation scientifique des constellations,* International Astronomical Union, Cambridge, 1930. La ligne en trait interrompu est l'image de l'écliptique.

Quel est le sens et la portée de cette découverte? — en quoi consiste cette prédiction mathématique de P. Lowell? — et, d'abord, quels sont les précédents?

II. — *LES PRÉCÉDENTS.*

Outre la Terre et le Soleil, les astres du système solaire connus des anciens étaient la Lune, Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne. Si nous ne parlons ni des satellites, ni des comètes,

nous devons descendre jusqu'en 1781 pour rencontrer la découverte d'un membre nouveau de ce système: c'est le 13 mars de cette année que William Herschel, au cours d'une révision minutieuse du voisinage de l'écliptique, aperçut la planète qui devait s'appeler Uranus, grosse planète dont la distance au Soleil l'emportait sur celle de Saturne. Le rayon de la plus grande orbite passait ainsi de 10 à 20 fois le rayon de l'orbite terrestre. Il semble bien que cette extension ait été trop considérable pour qu'on ait songé tout de suite à la possibilité d'une extension nouvelle. Mais le passage du simple au double, pour le diamètre du système solaire, ramena l'attention sur une loi empirique à laquelle obéissaient, sauf un accroc, les grands axes des orbites planétaires, et à laquelle venait de se soumettre, d'une manière étonnante, l'astre nouveau.

On se rappelle cette loi de Titius: écrivez les nombres

0 3 6 12 24 48 96 192...

dont chacun, à partir du troisième, est le double du précédent; ajoutez quatre unités à chacun d'eux, et divisez les sommes par 10 :

0,4 0,7 1,0 1,6 2,8 5,2 10,0 19,6...;

ces quotients sont admirablement, à l'approximation dont on va se rendre compte, les mesures des demi-grands axes ou rayons moyens des orbites planétaires successives, avec le demi-grand axe de l'orbite terrestre pour unité :

Mercure	0,39	Jupiter	5,20
Vénus	0,72	Saturne	9,55
la Terre	1,00	Uranus	19,22
Mars	1,52		

Si nous avons le goût ou l'habitude de formules plus condensées, nous écrirons :

$$a_1 = 0{,}4 \quad \text{puis} \quad a_n = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^{n-2} \ (n > 1).$$

Mais il y a cet accroc annoncé tantôt et sur lequel nous avons, depuis, fermé les yeux: au nombre 2,8 du tableau obtenu ne correspond aucune planète; dans l'application de la formule en v_n, nous faisons :

$n = 1$ pour Mercure,
$n = 2$ » Vénus,
$n = 3$ » la Terre,
$n = 4$ » Mars,

mais c'est $n = 6$ que nous devons faire pour retrouver la distance héliocentrique de la planète suivante, Jupiter.

Si la loi empirique de Titius a quelque fondement cosmogonique, elle dénonce une lacune entre les orbites de Mars et de Jupiter, comme si une planète, disparue ou inobservée, y avait, jadis, décrit son orbite, ou la décrivait, à une distance héliocentrique moyenne voisine de $a_5 = 2{,}8$. C'est ce que Bode a fait remarquer dans les dernières années du XVIII^e siècle, et il y avait là une recommandation aux astronomes de fouiller avec plus de soin les environs de l'écliptique.

Ce conseil ne fut pas vain, ni vaines les recherches qu'il provoqua: le 1er janvier 1801, Piazzi découvrit la petite planète qui fut nommée Cérès, et ce ne fut là que le premier d'événements dont la fréquence devait aller en croissant,

en 1801,	par Piazzi,	Cérès,	$a =$ 2,77
1802,	Olbers,	Pallas,	2,77
1804,	Harding,	Junon,	2,67
1807,	Olbers,	Vesta,	2,36
1845,	Hencke,	Astrée,	2,58
1847,	Hencke,	Hébé,	2,43
1847,	Hind,	Flora,	2,20
1847,	Hind,	Iris,	2,38
1848,	Graham,	Métis,	2,39
1849,	Gasparis,	Hygea,	3,13

et ainsi de suite, au point qu'aujourd'hui, l'anneau des astéroïdes comporte près de 1100 planètes reconnues différentes, et que le nombre total de ces petits astres est estimé de l'ordre de 2000: de quoi satisfaire les cosmogonistes qui y voient naturellement les débris de la planète de Bode.

La découverte des planètes télescopiques nous a fait assister à la réalisation d'une prédiction astronomique. Le télégramme de M. Shapley parle d'une prédiction qui aurait été faite par Lowell, et qui viendrait à se réaliser. S'agit-il ici encore de quelque loi empirique, ou de spéculations cosmogoniques? Nous allons voir à quel point c'est d'autre chose qu'il s'agit, et ceci n'est pas sans précédent: nous rencontrerons ce précédent dans la découverte de la planète Neptune, prédite par les calculs de Le Verrier et d'Adams.

Depuis la découverte d'Uranus, les mouvements planétaires se calculaient dans l'hypothèse que l'orbite de cet astre marque les confins du système solaire. Le jour où les résultats de ces calculs ont cessé d'être vérifiés par l'observation a été celui où s'est révélée la présence de Neptune. Et le jour où, recommencés dans l'hypothèse d'un monde planétaire limité à l'orbite de Neptune, les calculs ont été mis en défaut, a été celui où se sont manifestées une ou plusieurs planètes inconnues, une ou plusieurs transneptuniennes. Mais comment se confrontent le calcul et l'observation? Répondre à cette question, c'est dire comment se construisent les Tables où se trouvent, calculées à l'avance, les positions auxquelles on devra comparer, pour y trouver confirmation ou infirmation, les résultats des observations.

III. — *LES ÉLÉMENTS PLANÉTAIRES.*

Dans la définition des *éléments* d'une planète, l'orbite est censée elliptique, le Soleil occupant l'un des foyers, et décrite conformément à la loi des aires. De plus, on y invoquera la loi collective des mouvements planétaires, à savoir que, pour deux planètes quelconques, les cubes des grands axes des orbites sont d'autant mieux proportionnels aux carrés des durées des révolutions que les masses sont plus petites devant celle du Soleil.

Nous devrons appliquer si souvent cette loi collective qu'il est utile de nous y arrêter un instant. Considérons-la à l'approximation pour laquelle les masses planétaires sont négligeables devant la masse du Soleil. Alors si a et a' sont les demi-grands axes des orbites de deux planètes, et T et T' les durées respectives de leurs révolutions, ces quatre quantités sont unies par la relation

$$\frac{a^3}{a'^3} = \frac{T^2}{T'^2}.$$

Or, pour la Terre, la durée de révolution est l'année, et le demi-grand axe de l'orbite est ce que nous adoptons pour unité astronomique de distance. Il en résulte qu'une planète dont l'orbite à tel demi-grand axe a ne peut avoir pour durée de révolution que tel nombre T calculable d'années. Dans le tableau suivant, à des demi-grands axes a, exprimés en rayons moyens de

l'orbite terrestre, correspondent, en années, ces durées de révolution.

a	T	a	T	a	T
5	11,14	45	302	85	784
10	31,62	50	353	90	854
15	58,09	55	408	95	936
20	89,44	60	465	100	1000
25	125,00	65	524	200	2828
30	165	70	586	300	5197
35	207	75	649	400	8000
40	253	80	716	500	11180

C'est ainsi que le demi-grand axe de l'orbite de Saturne étant 9,55, voisin de 10, la durée de sa révolution est 10759 jours ou 29,48 années juliennes, voisine de 31,62 ans.

Ceci entendu, les éléments d'une planète sont au nombre de sept: cinq éléments géométriques, un élément cinématique, un élément dynamique.

a) Les *cinq éléments géométriques* sont des grandeurs dont la connaissance est suffisante à la détermination de l'ellipse orbitale: deux éléments pour définir le plan de l'orbite (dont on sait déjà qu'il passe par le Soleil); deux éléments pour définir la forme et la grandeur de l'orbite (le demi-grand axe et l'excentricité); et un élément pour définir dans son plan l'orientation de l'orbite (dont on sait déjà que le Soleil occupe un foyer).

b) Avec les éléments géométriques, et eu égard à la loi des aires et à la loi collective du système, l'*élément cinématique* (par exemple l'instant du passage de la planète au périhélie) suffit au calcul de la position de l'astre à un instant quelconque, en première approximation.

c) L'*élément dynamique* est la masse de la planète: on va rappeler comment il coopère au passage de la première à la deuxième approximation dans le calcul de la position de la planète à un instant quelconque.

En quoi consistent cette première et cette deuxième approximations? Ce n'est que si le système se réduisait au Soleil et à la planète considérée que celle-ci décrirait, conformément à la loi des aires, une ellipse invariable: les éléments géométriques et l'élément cinématique seraient alors constants comme l'élément

dynamique. On voit que cette hypothèse néglige les autres planètes, c'est-à-dire, dynamiquement, leurs masses devant celle du Soleil; il est donc raisonnable, à l'approximation que définit cette hypothèse, de négliger aussi la masse de la planète considérée. C'est la première approximation; dans le système planétaire, chaque planète y est envisagée séparément, dans l'ignorance des autres, et la loi collective s'y réduit à ceci: les cubes des grands axes des orbites des diverses planètes sont proportionnels aux carrés des durées des révolutions.

Par rapport à des axes de repère héliocentriques dont les directions sont invariables dans le solide stellaire, nous allons considérer les coordonnées polaires de la planète. Sauf de légères corrections, ces conditions sont remplies par les axes héliocentriques écliptiques, dont le plan fondamental est celui de l'orbite terrestre. Les coordonnées polaires y sont la longitude céleste G, la latitude céleste L, et le rayon vecteur ϱ, distance au Soleil.

Dans la première approximation, ces coordonnées sont des fonctions déterminées du temps t. Les coefficients que ces fonctions comportent s'écrivent numériquement dès que l'on possède les valeurs numériques des cinq éléments géométriques $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ et de l'élément cinématique t_0 :

$$\begin{aligned} \mathrm{G} &= f_1\ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, t_0, t), \\ \mathrm{L} &= f_2\ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, t_0, t), \\ \varrho &= f_3\ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, t_0, t). \end{aligned}$$

Inversement, c'est parce que les éléments qui interviennent ainsi sont au nombre de six, et parce que chaque observation planétaire permet d'écrire deux équations, que trois observations suffisent, théoriquement, à la détermination des valeurs numériques des éléments géométriques et de l'élément cinématique d'une planète observée. Bien entendu, dans la pratique, on ne se contentera pas de ce minimum algébrique de trois observations; d'abord une quatrième observation sera souvent nécessaire pour lever certaine ambiguïté; et, dans tous les cas, on multipliera les observations autant que possible, de manière à réduire au minimum l'influence des inexactitudes accidentelles que comporte toute mesure.

Supposons connues les valeurs numériques des éléments $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, t_0)$. Les coordonnées polaires (G, L, ϱ) sont

maintenant des fonctions du temps qui s'expriment numériquement au moyen de ces valeurs numériques des éléments elliptiques de première approximation. Ces fonctions vont nous permettre de construire une *Table héliocentrique du mouvement planétaire elliptique.*

Pour ceci, donnons au temps t des valeurs numériques définissant des instants à venir, aussi serrées et aussi nombreuses que l'on voudra. A chacune de ces valeurs t du temps correspondent, par les formules qui viennent d'être obtenues, des valeurs numériques de la longitude céleste héliocentrique G, de la latitude héliocentrique L et de la distance au Soleil ϱ.

Les résultats de ces calculs s'écrivent en un tableau en quatre colonnes: la colonne des instants t, celle des longitudes G, celle des latitudes L, celle des rayons vecteurs ϱ, les valeurs de ces coordonnées prises par la planète à un même instant s'y trouvant écrites sur une même ligne. L'ensemble de ces quatre colonnes constitue la Table héliocentrique de la planète, en son mouvement elliptique de première approximation. Nous allons la confronter avec l'observation.

Dressons une liste des longitudes (par exemple) mesurées aux instants prévus dans la première colonne de la table, ou à quelques-uns de ces instants convenablement espacés. Il est vrai que ces résultats d'observation sont, tels quels, des longitudes de la planète, non pas héliocentriques, mais à partir de tel observatoire terrestre: on aperçoit tout de suite le moyen de les transformer dans des longitudes héliocentriques. Il est entendu que c'est après ces corrections que la liste des longitudes mesurées a été dressée. Rapprochons-la de l'extrait correspondant de la table théorique, tiré de sa deuxième colonne. Il n'y a pas coïncidence.

Peut-être une partie des discordances est-elle due à des inexactitudes dans les valeurs numériques adoptées pour les éléments planétaires elliptiques, mais ces valeurs eussent-elles été calculées avec le maximum de rigueur, dans l'hypothèse de leur invariabilité, que nous nous heurterions encore à des discordances intolérables.

Nous savions bien que nous devrions abandonner cette attitude simplificatrice où les masses planétaires sont considérées comme négligeables. Voyons maintenant dans quelle mesure

nous pourrions améliorer les éléments elliptiques pour diminuer, autant que possible, toujours en première approximation, les discordances constatées.

Bornons-nous à l'étude des différences entre longitudes calculées et longitudes observées. Transformons en un diagramme le tableau numérique de ces différences. C'est ce qui est fait dans la figure 2: les abscisses y sont les longitudes héliocentriques déduites des longitudes observées de la planète, et que nous appellerons désormais, par abréviation, longitudes (héliocentriques) observées; les ordonnées y sont les excès de la longitude observée sur la longitude calculée Ainsi à chaque observation (ou à chaque groupe d'observations, représenté par son résultat moyen) correspond un point; tous les points se trouveraient sur l'axe horizontal des erreurs nulles si la table était parfaite, c'est-à-dire si son approximation était au plus égale à celle des observations. Les points situés au-dessus de cette ligne correspondent aux longitudes observées en excès sur les longi-

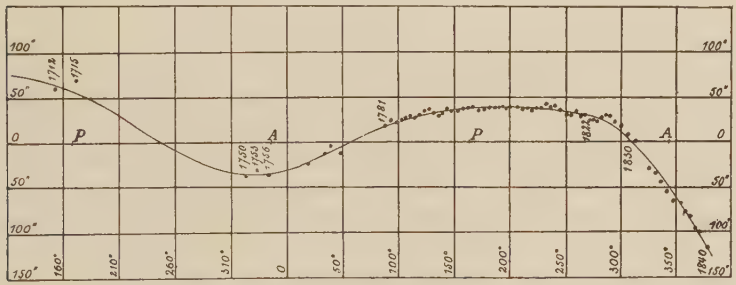


Fig. 2. — Perturbations d'Uranus de 1712 à 1840: en fonction de la longitude observée, excès de la longitude observée sur la longitude calculée; à partir de 1781, chaque point correspond à la moyenne annuelle de ces différences; les abscisses des points A et P sont les longitudes attribuées à l'aphélie et au périhélie de la planète, respectivement.

tudes calculées, et c'est aux différences opposées que correspondent les points situés au-dessous de cette ligne.

Cherchons à modifier les six éléments planétaires de façon que ces points se rapprochent autant que possible de l'axe des erreurs nulles: pour ceci, nous devrions examiner successivement l'influence sur la longitude calculée d'une correction apportée à chacun d'eux. Nous ne pourrions le faire d'une manière

satisfaisante qu'avec les formules du mouvement planétaire sous les yeux. Constatons seulement que nous disposons de six éléments pour l'amélioration de l'orbite. Si les valeurs numériques de ces six éléments étaient exactes, de petites variations qui leur seraient appliquées donneraient naissance à une courbe d'erreurs en longitude, définie par les valeurs numériques de ces variations: ce serait une ligne à six paramètres, à savoir une ligne ondulée, passant alternativement de l'un à l'autre côté d'une droite déterminée qu'elle couperait en des points situés à des intervalles de 180°.

Inversement, l'amélioration des éléments actuels consiste dans l'identification de la courbe d'erreurs constatée avec une courbe de cette famille de lignes à six paramètres: le choix de la courbe la plus avantageuse et, par conséquent, la détermination des valeurs les plus avantageuses des six paramètres ressortit à la Théorie des erreurs d'observation.

IV. — *LES PERTURBATIONS.*

Mais, si bien que nous appliquions la Théorie des erreurs, si avantageusement que nous choisissions les corrections à appliquer aux éléments elliptiques de la planète, les différences entre la longitude observée et la longitude calculée prennent encore, quoique réduites, des grandeurs intolérables. C'est que nous devons renoncer à la première approximation, propre au problème des deux corps, et, en seconde approximation, considérer le système planétaire dans son ensemble.

Les expressions de la longitude, de la latitude et du rayon vecteur utilisées jusqu'ici sont incomplètes: il faut y ajouter ce qui est dû aux attractions des autres planètes, pour les transformer dans les fonctions du temps propres à la seconde approximation.

Représentons par m la masse de la planète étudiée, puis par

$$a'_1, \quad a'_2, \quad a'_3, \quad a'_4, \quad a'_5, \quad t'_0, \quad m'$$

les éléments géométriques et cinématique et la masse d'une deuxième planète, puis par

$$a''_1, \quad a''_2, \quad a''_3, \quad a''_4, \quad a''_5, \quad t''_0, \quad m''$$

les éléments géométriques et cinématique et la masse d'une troi-

sième planète, et ainsi de suite. Les coordonnées (G, L, ϱ) de la planète étudiée sont des fonctions du temps par l'intermédiaire de toutes ces grandeurs. Enfin, si l'on veut continuer de considérer chaque orbite planétaire comme une ellipse, on doit dire que cette ellipse se déforme et se déplace, de sorte que les éléments géométriques et cinématiques de toutes les planètes sont eux-mêmes des fonctions du temps. Par exemple, eu égard aux seules variations séculaires (c'est-à-dire abstraction faite des variations périodiques), l'excentricité e de l'orbite terrestre est

$$e = 0{,}0167498 - 0{,}00004258\ t - 0{,}000000137\ t^2$$

où le temps t est mesuré en siècles juliens de 36525 jours, à partir du premier janvier 1900. Cette fonction du temps est tirée de la liste des éléments écliptiques des orbites planétaires, tels qu'ils ont servi à la construction des tables de Le Verrier et de Gaillot, publiées dans les *Annales de l'Observatoire de Paris* (tomes 13, 14 et 28).

Le nouveau problème de la construction d'une table du mouvement planétaire est donc le suivant.

1. Etablissement des expressions des coordonnées (G, L, ϱ) de la planète à un instant quelconque t. C'est ce dont se charge la Mécanique céleste, jusqu'à obtenir trois fonctions du temps t, moyennant des coefficients dont nous nous contenterons de figurer par n le nombre, nécessairement élevé, et parmi lesquels se trouvent ceux (m, m', m'', ...) qui représentent les masses invariables des diverses planètes.

2. Calcul des valeurs numériques des n coefficients. Chaque observation de la planète, à un instant connu, permet d'écrire deux équations entre ces coefficients inconnus. Par conséquent $n/2$ observations suffisent, théoriquement, à la résolution du problème; et nous savons pourquoi il faut envisager des observations plus nombreuses, en prévoyant la substitution des méthodes de la Théorie des erreurs aux procédés habituels de l'Algèbre.

3. — Dans les expressions des coordonnées polaires héliocentriques, les coefficients figurés jusqu'ici par des lettres seront remplacés par les valeurs numériques qui viennent d'être obtenues. Les expressions de ces coordonnées sont ainsi constituées

sous forme de fonctions dans lesquelles tout, sauf le temps t, est numérique.

4. — Enfin, on traitera ces fonctions du temps comme on a traité les fonctions correspondantes du temps en première approximation, pour des valeurs de t aussi serrées et aussi nombreuses que l'on voudra.

Les résultats des calculs s'écrivent encore dans un tableau en quatre colonnes: la colonne des valeurs de t aux instants prévus, celle des longitudes, celle des latitudes, celle des rayons vecteurs; et l'ensemble de ces quatre colonnes constitue, essentiellement, la Table héliocentrique de la planète considérée.

Par exemple voici, d'après la *Connaissance des Temps,* les coordonnées écliptiques de Jupiter, au début de 1931, de deux en deux jours, à minuit (0^h), temps civil de Greenwich :

		G	L	log ϱ
janvier	2	105° 4' 9",2	+ 0° 7' 15",9	0,715 4235
	4	105 14 9 ,2	0 7 29 ,5	0,715 4847
	6	105 24 9 ,0	0 7 43 ,1	0,715 5458
	8	105 34 8 ,7	0 7 56 ,7	0,715 6069
	10	105 44 8 ,2	0 8 10 ,4	0,715 6681

Le mathématicien pur, qui se contenterait de schématisations, pourrait estimer sans difficultés de principe cet immense problème. Le mécanicien céleste et l'astronome doivent le résoudre jusqu'au bout, numériquement. Sera-ce d'une manière rigoureuse? Il ne faut pas y songer. Nous nous trouvons aujourd'hui devant le problème des N corps, où N est le nombre des astres du système; et N ne vaudrait-il que trois que, déjà, la solution rigoureuse ne s'obtiendrait qu'au prix de transformations qui le font sortir du domaine de l'Astronomie.

Mais les circonstances se prêtent, par bonheur, à l'application de ce dispositif infiniment précieux qu'est la méthode de résolution des problèmes par approximations successives.

Revenons pour un instant à l'hypothèse simplificatrice qui définit le problème des deux corps, en négligeant les masses planétaires devant celle du Soleil. Nous avons appris à construire les tables correspondantes : au fur et à mesure que le temps avance dans la première colonne, confrontons-les avec l'observation.

Certes, les discordances vont bientôt se manifester, mais tout de même pas très vite ni très fort. Comment comprendre ceci? C'est que les masses des planètes sont petites devant celle du Soleil. Quand nous pourrons les calculer, ce ne sont que des nombres bien petits que nous trouverons pour rapports m de ces masses à celle du Soleil, même pour les gros astres du système, ceux dont la série débute à Jupiter :

Jupiter	$m = 1/1.047$
Saturne	$m = 1/3.501$
Uranus	$m = 1/22.869$

Ceci se retrouve dans les mots que l'on emploie : l'orbite elliptique, celle du problème des deux corps, est l'orbite *non troublée;* les autres planètes sont les *planètes perturbatrices;* les modifications qu'elles apportent à l'orbite elliptique sont les *perturbations* de la planète considérée.

Ainsi, l'étude du mouvement, censé elliptique, de chaque planète nous donne de bonnes valeurs de première approximation de ses divers éléments, sauf de sa masse. Dans la résolution du problème en deuxième approximation, les inconnues ne seront plus que des corrections petites à apporter aux valeurs précédentes, outre les masses planétaires, petites comme elles dans leurs rapports à la masse du Soleil. C'est alors l'appel aux ressources de l'analyse mathématique, les développements en séries suivant ces quantités petites, après quoi les redoutables équations de tantôt se réduisent à de rassurantes équations du premier degré, immédiatement soumises à la Théorie des erreurs pour la détermination numérique de toutes les inconnues, eu égard aux résultats des observations.

Le symbolisme algébrique permet un peu plus de précision. Avant l'application des approximations successives, la longitude G de la planète, en particulier, était une fonction du temps de la forme

$$G = F_1 (a_1, \ldots t_0, m; a'_1, \ldots t'_0, m'; a''_1, \ldots t''_0, m''; \ldots; t)$$

où le temps t se trouve aussi dans tous les éléments géométriques et cinématiques. Le développement décrit ci-dessus la réduit à

$$G = f_1 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \tau_0, t) + R + R' + R'' + \ldots,$$

expression dans laquelle :

chaque lettre α représente la valeur que prend l'élément variable a de même indice à une *époque* déterminée;

la lettre τ_0 représente l'instant où la planète passerait au périhélie de l'orbite si celle-ci était elliptique et définie par les valeurs α des éléments géométriques ;

le terme R est une fonction du temps qui s'annulerait en même temps que la masse de la planète considérée ;

le terme R' est une fonction du temps qui s'annulerait en même temps que la masse de la première planète perturbatrice ;

et ainsi de suite.

Le passage de la première à la seconde approximation consiste donc dans l'introduction des termes perturbateurs R, R', R", ... ; ceux-ci sont petits devant le premier terme de G, représentatif du mouvement non troublé.

On voit maintenant comment la construction des Tables planétaires s'exécutera jusqu'au bout : nous pourrons, en chaque occurrence, les considérer comme construites, et c'est la confrontation de l'une d'elles avec les observations qui va nous conduire à la découverte, annoncée déjà, d'une planète transuranienne.

V. — *LA DÉCOUVERTE DE NEPTUNE.*

Cette histoire de la découverte de Neptune a été racontée bien des fois et il est devenu difficile de la présenter d'une manière un peu originale. Nous la trouvons, en particulier, dans ce livre d'une admirable clarté que sont les *Outlines of Astronomy* de John Herschel, en son édition de 1850, dans le *Report to the Smithsonian Institution on the History of the Discovery of Neptune,* par Benjamin Gould, en 1850, et dans le tome II du *Cours d'Astronomie de l'Ecole polytechnique,* par H. Faye, dont la première édition date de 1883. Mais il faut remonter aux travaux originaux : ceux de Le Verrier dans les *Comptes rendus* de l'Académie des sciences de Paris, à partir du 10 novembre 1845, date de la première communication, ainsi que dans les *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel, dite Uranus,* dans les *Additions à la Connaissance des temps* pour 1849 ; ceux d'Adams, par l'intermédiaire de l'article publié par Airy dans les *Monthly Notices* de la Royal Astronomical Society, tome 7, 1846, *An Account of some Circumstances historically connected with the Discovery of the Planet exterior to Uranus,* et, de

la plume d'Adams lui-même, dans le supplément au *Nautical Almanac* pour 1851, *On the Perturbations of Uranus.*

Par l'attraction newtonienne, tout se tient dans le système planétaire: aussi devons-nous remonter à la découverte d'Uranus par W. Herschel, en 1781.

Lorsque l'observation un peu prolongée de la planète eut permis le calcul de ses éléments en première approximation, on put déterminer, à peu près, les positions qu'elle avait occupées, par exemple au cours des cent années précédentes, sur la sphère étoilée. C'est ainsi qu'on constata l'identité d'Uranus avec des astres de même grandeur observés naguère par Flamsteed et quelques autres, et considérés comme des étoiles qu'on n'aurait pas retrouvées. On obtint ainsi vingt identifications: Uranus avait été observé par Flamsteed une fois en 1690, une fois en 1712, quatre fois en 1715, — par Bradley en 1753, — par Mayer en 1756, — par Lemonnier, douze fois, en 1750, 1764, 1768, 1769, 1771. Ces observations permirent d'écrire des équations plus nombreuses entre les éléments de l'orbite, toujours elliptique, et, par conséquent, une application plus efficace de la Théorie des erreurs.

En 1820 on possédait, avec celles d'avant Herschel, des observations assez nombreuses pour soumettre Uranus au calcul des perturbations, en vue de la construction de tables qui seraient, autant que possible, définitives. La théorie avait été faite par Laplace: les calculs furent entrepris par Bouvard, qui avait déjà donné de bonnes tables de Jupiter et de Saturne.

Quelles sont les planètes perturbatrices dont il y a lieu de tenir compte? Pourquoi pas toutes? Parce que nos calculs ne se font jamais qu'à une approximation déterminée, et qu'il faut prévoir quels sont les termes qui, calculés, n'atteindraient pas cette approximation. En ce qui concerne les perturbations d'Uranus, c'est le cas des termes dus aux planètes voisines du Soleil, jusqu'à Mars: elles restent toujours à grande distance d'Uranus, et le rapport m de leurs masses à celle du Soleil sont extrêmement petits :

Mercure	m =	1/6.000.000
Vénus		1/408.000
la Terre		1/336.000
Mars		1/3.093.500

La tâche de Bouvard était donc d'écrire numériquement trois fonctions de la forme

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \tau_0, t) + R + R' + R'',$$

l'une pour la longitude, l'autre pour la latitude, la troisième pour le rayon vecteur, où les α et τ_0 sont les éléments géométriques et cinématique d'Uranus à l'époque choisie, R le terme qui s'annulerait avec la masse d'Uranus, R' et R'' les termes perturbateurs dus à Jupiter et à Saturne.

Ce fut l'échec: le mouvement observé d'Uranus ne s'accordait pas avec celui que prévoyaient les tables. Et Bouvard eut beau recommencer ses calculs en faisant abstraction des observations antérieures à Herschel, et déclarées suspectes: la longitude d'Uranus se trouva bientôt en avance sur la longitude calculée; en 1822, cette avance commença de diminuer rapidement; si l'accord se rétablit en 1830-1831, ce ne fut que pour un instant, et les rôles s'intervertirent: Uranus ne suivit que de plus en plus loin l'astre par lequel le calcul l'avait remplacé; en 1840, la différence des longitudes avait atteint 128".

C'est ce que représente la figure 2, qui nous a déjà servi à propos de considérations plus générales: les abscisses y sont les longitudes d'Uranus, à partir de la longitude proche de 160°, lors de l'observation de 1712; l'axe des ordonnées y est chiffré en secondes, pour les excès de la longitude observée sur la longitude calculée.

De différents côtés, l'idée se fit jour que les perturbations inexpliquées d'Uranus étaient dues à une planète inconnue; indépendamment l'un de l'autre, deux astronomes s'attachèrent à la détermination des éléments de cet astre perturbateur nouveau: Adams en Angleterre, et Le Verrier en France.

La formule appliquée au calcul de la table des longitudes

$$G = f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \tau_0, t) + R + R' + R''$$

devait être remplacée par une formule qui renfermât un terme supplémentaire R''' correspondant à l'astre perturbateur :

$$G = f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \tau_0, t) + R + R' + R'' + R'''.$$

A la rigueur, il fallait chercher les éléments de la planète nouvelle et la manière dont ils varient avec le temps, mais il fallait aussi reprendre à frais nouveaux le calcul de toutes les constantes relatives aux planètes mises en jeu: Jupiter, Saturne

et Uranus. C'est encore le principe des approximations qui va nous tirer d'affaire.

Dans l'expression de G, les quatre derniers termes sont petits devant le premier. Chaque petite variation donnée à l'un des éléments géométriques ou cinématique d'Uranus, dans sa valeur à l'époque adoptée, fait apparaître un terme petit. Une variation petite donnée à la masse d'Uranus ou à un élément d'une planète perturbatrice donnerait naissance à une correction petite d'un terme déjà petit: correction très petite, ou petite du second ordre, négligeable par hypothèse. Ainsi, les valeurs adoptées pour les éléments des astres perturbateurs déjà connus ne doivent pas être modifiés. Pour la même raison, les éléments elliptiques de la planète cherchée peuvent être considérés comme invariables.

Pratiquement le problème d'Adams-Le Verrier se réduisait à la détermination des grandeurs que voici: corrections des éléments géométriques et cinématique d'Uranus et éléments d'une planète nouvelle, censée en mouvement elliptique, calculés de manière à rendre minima les discordances des tables d'Uranus et des résultats des observations.

Malgré cette simplification, le problème n'était encore abordable que si la détermination des éléments de la planète inconnue pouvait se ramener au calcul d'autant de corrections petites, à partir de valeurs approchées de ces éléments. Mais sur quoi appuyer l'estimation de ces valeurs approchées?

Pour toute planète connue, le plan de l'orbite est peu incliné sur le plan de l'écliptique; et il paraîtra naturel d'admettre qu'il en est ainsi pour le plan de la planète cherchée: la valeur approchée de l'obliquité de ce plan sera donc zéro, et ceci fait disparaître la difficulté relative à la valeur approchée de la *longitude du nœud,* indéterminée lorsque l'obliquité est nulle.

Toute orbite planétaire connue est quasi circulaire; et on admettra qu'il en est ainsi pour celle de la planète cherchée: la valeur approchée de son *excentricité* sera donc zéro, et ceci fait disparaître la difficulté relative à la valeur approchée de la *longitude du périhélie,* indéterminée lorsque l'excentricité est nulle.

La masse de Jupiter même n'atteint pas le millième de celle du Soleil, et on pourra admettre même ordre de petitesse pour

la masse de la planète nouvelle: la valeur approchée de sa *masse*, devant celle du Soleil, sera donc zéro.

Les circonstances ne se prêtent pas à des simplifications aussi sommaires en ce qui concerne les autres éléments.

Il est vrai que, le long d'une orbite circulaire, l'instant de passage au périhélie perd aussi sa signification. Mais cette notion doit être remplacée par une autre, comme la position de la planète à telle époque; c'est à l'estimation de pareille position que nous allons nous attacher.

Depuis la répartition des deux groupes d'inconnues dans des termes distincts, f_1 et R''', de l'expression de la longitude G, nous avons le droit d'envisager séparément l'amélioration des éléments elliptiques d'Uranus et le calcul des éléments de la planète nouvelle.

Quant à l'amélioration des éléments elliptiques d'Uranus, à l'époque choisie, on peut lui appliquer ce qui a été dit de l'amélioration des éléments elliptiques d'une planète dans l'hypothèse du problème des deux corps. C'est ce qui a été fait. Des corrections ont été apportées à ces éléments de façon que la courbe C des différences entre les longitudes calculées anciennes et les longitudes calculées nouvelles épouse aussi bien que possible la ligne de la figure 2. Les différences des ordonnées de ces deux lignes mesurent les perturbations en longitude décidément imputables à la planète inconnue. Ainsi, un nouveau diagramme par points peut être tracé, celui de la figure 3: chaque point correspond à une observation d'Uranus, de 1712 à 1840; son abscisse est la longitude (héliocentrique) observée; son ordonnée est, pour la même abscisse, la différence entre les ordonnées du point de la figure 2 et du point correspondant de la courbe calculée C. L'ordonnée du point représentatif de telle observation y est donc, aussi bien, le nombre des secondes dont la longitude calculée est surpassée par la longitude observée, après les corrections les plus avantageuses apportées aux éléments de la planète. La ligne, lieu des points de la figure 3, est l'image des perturbations irréductibles imposées à Uranus par la planète inconnue.

On voit que jusqu'aux environs de 1800 l'amélioration des éléments elliptiques suffit à ramener pratiquement tous les

points du diagramme sur l'axe des erreurs nulles. Mais alors, presque subitement, il cesse d'en être ainsi: la divergence s'accentue rapidement, et passe par un maximum vers 1824. C'est à cette époque que les deux planètes ont dû se trouver en conjonction par rapport au Soleil. C'est à l'instant de la conjonction,

Fig. 3. — Perturbations d'Uranus, de 1712 à 1840, après correction des éléments elliptiques: en fonction de la longitude observée, excès de la longitude observée sur la longitude calculée.

en effet, que la composante tangentielle de l'attraction pertubatrice change de sens, en passant par zéro; les effets de cette composante, accumulés jusqu'à cet instant pour produire une erreur en longitude de plus en plus grande, commencent à se détruire: c'est bien là le passage par un maximum de l'erreur en longitude. Nous avons donc une valeur approchée de la *longitude héliocentrique* de la planète inconnue *à telle époque.*

Reste le demi-grand axe, rayon moyen de l'orbite. Or, nous ne possédons, pour ce rayon moyen, rien sur quoi nous puissions asseoir une hypothèse. Si frappantes qu'elles aient été, les coïncidences que nous avons constatées peuvent-elles nous inspirer, dans la loi empirique de Titius-Bode, une confiance qui irait jusqu'à l'extrapolation?

Adams et Le Verrier pensèrent que oui. Si peu raisonnable qu'elle ait été, cette audace leur assura le succès, mais dans le sens que voici: elle leur permit d'avancer; la route parcourue, on comprit ce qu'on avait risqué en s'y fiant. Avec si peu de garantie, le mathématicien pur n'aurait pas bougé. Pour l'astronome, sensible à l'harmonie de l'univers, une loi empirique, qui cherche à exprimer cette harmonie, est jugée suffisante; comme valeur approchée du *rayon moyen* de l'orbite transuranienne, il adopte

$$a_9 = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^7 = 38{,}8,$$

en rayons moyens de l'orbite terrestre.

Naturellement, il y a là quelque schématisation. Pour cette planète lointaine, Adams négligea le terme 0,4, et s'en tint à 38,4, sans améliorer ce nombre. Le Verrier le corrigea largement. De plus ,ni l'un ni l'autre ne cherchèrent à améliorer l'obliquité, censée nulle, du plan de l'orbite sur le plan de l'écliptique, diminuant ainsi de deux le nombre des inconnues. Sans doute, du reste, ce schéma, trop théorique, n'eût-il pas pu être rigoureusement suivi: des obstacles s'y rencontrent, qui ne peuvent être tournés que par des artifices; et c'est parce que ces artifices différèrent chez les deux calculateurs que leurs résultats ne se confondirent point.

En octobre 1845, Adams remettait à Airy, Royal Astronomer et directeur de l'Observatoire de Greenwich, les éléments de la planète nouvelle :

demi-grand axe	38,4
durée de révolution	237,6 ans
excentricité	0,1610
longitude du périhélie	315°55'
masse	1/6.038

Ce furent alors des demandes d'explication, des tergiversations, et les recherches d'Adams étaient encore en manuscrit lorsque, le 31 août 1846, Le Verrier présenta ses résultats à l'Académie des Sciences :

demi-grand axe	36,1539
durée de révolution	217,387 ans
excentricité	0,10761
longitude du périhélie	284°5'48"
masse	1/9.322

On sait quelle fut la fin sensationnelle de cette histoire. Le 18 septembre 1846, Le Verrier écrit à I.-G. Galle, de l'Observatoire de Berlin, en possession de cartes stellaires récentes, et lui indique la position de la planète nouvelle. La lettre arrive à Berlin le 23. Les observations commencent le soir du même jour, et la réponse à Le Verrier ne se fait pas attendre :

« Berlin, le 25 septembre 1846. Monsieur, la planète, dont vous avez signalé la position, *existe réellement*. Le même jour, où j'ai reçu votre lettre, je trouvais une étoile de la 8e grandeur,

qui n'était pas inscrite dans l'excellente carte Hora XXI (dessinée par M. le Docteur Bremiker) de la collection des cartes célestes, publiée par l'Académie royale de Berlin. L'observation du jour suivant décida que c'était la planète cherchée... ».

La position était, temps moyen de Berlin, en ascension droite et déclinaison :

sept.	23 12^h 0^m $14^s,6$	$\alpha = 328°\ 19'\ 16'',0$	$\delta = -13°\ 24'\ 8'',2$
	24 8 54 40 ,9	328 18 14 ,3	−13 24 29 ,2

à quoi correspond, à une minute près, une longitude de 325°23'.

Il y eut cependant un épilogue, moins brillant. On connut, au bout de quelques années, les éléments de la véritable orbite de Neptune. Voici ceux que publia Peirce:

demi-grand axe	30,067
durée de révolution	164,62 ans
excentricité	0,00872
longitude du périhélie	47°12'7"
masse	1/24.000

Le récit de Faye semble bien objectif; nous allons en copier les dernières lignes. — Ces éléments « différaient tellement de » ceux d'Adams ou de Le Verrier qu'il semble que M. Galle avait » découvert un astre tout différent de celui dont on avait cru » pouvoir assigner l'orbite par le calcul. Ces doutes n'étaient » pas fondés; mais il faut reconnaître que les deux savants » géomètres s'étaient un peu exagéré la portée de leur analyse. » Procédant par des hypothèses tout à fait gratuites sur la dis- » tance, ils ne devaient réellement aboutir qu'à assigner à peu » près la longitude de la planète cherchée, vers l'époque de sa » plus grande action sur la masse d'Uranus, et non ses vérita- » bles éléments. Au fond, c'était tout ce qu'il fallait pour la » découvrir ». Ajoutons que, chez Adams comme chez Le Verrier, la grande erreur sur l'excentricité s'est introduite en compensation de la grande erreur sur la moyenne distance: vers 1840, l'erreur sur le rayon vecteur ϱ n'atteignait pas 3 unités astronomiques; l'excentricité étant très erronée, la longitude du périhélie devenait tout à fait fallacieuse. Quant à la masse, l'erreur sur la distance devait l'exagérer; de plus, elle ne devrait guère être calculée le plus avantageusement qu'après la découverte du satellite: aujourd'hui on dit 1/19.314.

(*A suivre.*)

N° 70.

Simplifications à la méthode de Gauss pour la détermination des orbites dans le cas d'une planète très éloignée

par M. M. Alliaume (1)

1. Dans les séances des 14 et 28 avril et du 12 mai 1930 de l'Académie des Sciences de Paris (*Comptes-rendus*, t. 190, pp. 897, 981 et 1085), M. E. Esclangon a publié une méthode pour le calcul des orbites de planètes et de comètes observées en des positions suffisamment lointaines. Cette méthode a pour objet actuel l'orbite du corps découvert récemment à l'observatoire Lowell et dont la distance héliocentrique est supérieure au rayon moyen de l'orbite de Neptune.

Par rapport à des axes héliocentriques, soient $(x_i, y_i, z_i, i = 1, 2, 3)$ les coordonnées de l'astre aux instants (t_1, t_2, t_3) de trois observations, (ξ_i, η_i, ζ_i) les coordonnées de la Terre, $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ les cosinus directeurs de la droite Terre-astre, et ρ_i les distances Terre-astre respectivement aux mêmes instants :

$$x_i = \xi_i + \alpha_i\rho_i, \qquad y_i = \eta_i + \beta_i\rho_i, \qquad z_i = \zeta_i + \gamma_i\rho_i.$$

En première approximation, M. Esclangon considère le déplacement de l'astre comme rectiligne et uniforme; avec les notations

$$\theta_1 = t_3 - t_2, \qquad \theta_2 = t_1 - t_3, \qquad \theta_3 = t_2 - t_1,$$

telles que

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0,$$

cette hypothèse simplificatrice est exprimée par les trois égalités

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 = 0,$$
$$\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2 + \theta_3 y_3 = 0,$$
$$\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2 + \theta_3 z_3 = 0.$$

---

(1) ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE (*Bulletin de la Classe des Sciences*, 5e sér., t. XVI, 1930, pp. 805-810).

Eu égard aux expressions ci-dessus des coordonnées de l'astre aux instants d'observation, ces égalités constituent un système de trois équations aux inconnues (ρ_1, ρ_2, ρ_3).

En deuxième approximation, on abandonne l'hypothèse du mouvement rectiligne et uniforme, et on calcule la valeur des expressions

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3, \ldots$$

qui cessent d'être nulles. Elles sont développables en séries suivant les puissances croissantes de θ_i, les premiers termes non nuls étant du troisième ordre et renfermant en dénominateur les cubes des distances héliocentriques r_i de l'astre aux instants des observations.

Chacun des r_i, ne devant entrer que dans un terme petit, peut être remplacé par une valeur de la distance héliocentrique de la planète obtenue en première approximation et, aussi bien, la même quel que soit i. Les trois équations en (ρ_1, ρ_2, ρ_3) reprennent ainsi la forme linéaire.

2. Or, la méthode de Gauss peut être présentée de la manière suivante. Les trois positions P_i de l'astre sont dans un même plan avec le Soleil, origine des coordonnées :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si (μ_1, μ_2, μ_3) sont des quantités proportionnelles aux aires des triangles P_2OP_3, P_3OP_1, P_1OP_2, cette égalité peut se mettre sous chacune des trois formes

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 0,$$
$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 = 0,$$
$$\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3 = 0.$$

Or, par un développement en série suivant les puissances de θ_i, on peut adopter

$$\mu_i = \theta_i \left[1 - \frac{\mu \theta_i^2}{6 r_i^3} + \left(\frac{dr}{dt}\right)_i \frac{\mu \theta_i^3}{4 r_i^4} + \dots \right].$$

La première approximation, d'autant meilleure que l'astre est plus lointain, consiste à réduire à l'unité la quantité entre crochets, et les égalités correspondantes

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 = 0, \dots$$

constituent un système de trois équations linéaires en (ρ_1, ρ_2, ρ_3):

$$\alpha_1\theta_1\rho_1 + \alpha_2\theta_2\rho_2 + \alpha_3\theta_3\rho_3 + \theta_1\xi_1 + \theta_2\xi_2 + \theta_3\xi_3 = 0,$$
$$\beta_1\theta_1\rho_1 + \beta_2\theta_2\rho_2 + \beta_3\theta_3\rho_3 + \theta_1\eta_1 + \theta_2\eta_2 + \theta_3\eta_3 = 0,$$
$$\gamma_1\theta_1\rho_1 + \gamma_2\theta_2\rho_2 + \gamma_3\theta_3\rho_3 + \theta_1\zeta_1 + \theta_2\zeta_2 + \theta_3\zeta_3 = 0.$$

Cette première approximation équivaut à confondre les triangles définis par les positions planétaires prises deux à deux avec les secteurs correspondants de l'orbite, ce qui revient à l'hypothèse cinématique de M. Esclangon.

3. La deuxième approximation consiste à conserver aussi le deuxième terme entre crochets, r_i y étant calculé au moyen de la valeur de ρ_i obtenue en première approximation :

$$r_i^2 = \rho_i^2 + 2(\alpha_i\xi_i + \beta_i\eta_i + \gamma_i\zeta_i)\rho_i + \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2.$$

D'où les trois équations linéaires en (ρ_1, ρ_2, ρ_3) :

$$\alpha_1\Theta_1\rho_1 + \alpha_2\Theta_2\rho_2 + \alpha_3\Theta_3\rho_3 + \Theta_1\xi_1 + \Theta_2\xi_2 + \Theta_3\xi_3 = 0,$$
$$\beta_1\Theta_1\rho_1 + \beta_2\Theta_2\rho_2 + \beta_3\Theta_3\rho_3 + \Theta_1\eta_1 + \Theta_2\eta_2 + \Theta_3\eta_3 = 0,$$
$$\gamma_1\Theta_1\rho_1 + \gamma_2\Theta_2\rho_2 + \gamma_3\Theta_3\rho_3 + \Theta_1\zeta_1 + \Theta_2\zeta_2 + \Theta_3\zeta_3 = 0,$$

où

$$\Theta_i = \theta_i \left(1 - \frac{\mu\theta_i^2}{6 r_i^3}\right).$$

4. Ce ne sont pas tout-à-fait les formules de M. Esclangon. Celui-ci obtient

$$\Theta_1 = \theta_1\left(1 - \frac{\mu\theta_2\theta_3}{6r_1^3}\right), \quad \Theta_2 = \theta_2\left(1 - \frac{\mu\theta_3\theta_1}{6r_2^3}\right), \quad \Theta_3 = \theta_3\left(1 - \frac{\mu\theta_1\theta_2}{6r_3^3}\right),$$

mais estime que l'on peut généraliser ce résultat d'une manière qui équivaut à écrire

$$\Theta_1 = \theta_1\left(1 - \frac{\mu}{2}\frac{p_1}{p_1+p_2+p_3}\frac{\theta_2\theta_3}{r_1^3}\right),$$

$$\Theta_2 = \theta_2\left(1 - \frac{\mu}{2}\frac{p_2}{p_1+p_2+p_3}\frac{\theta_3\theta_1}{r_2^3}\right),$$

$$\Theta_3 = \theta_3\left(1 - \frac{\mu}{2}\frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}\frac{\theta_1\theta_2}{r_3^3}\right),$$

quels que soient les poids (p_1, p_2, p_3).

Or, en vertu de l'identité

$$\theta_1^3 + \theta_2^3 + \theta_3^3 - 3\theta_1\theta_2\theta_3,$$

il suffit de poser

$$p_1 = \theta_1^3, \qquad p_2 = \theta_2^3, \qquad p_3 = \theta_3^3$$

pour que ces expressions de Θ_1, Θ_2, Θ_3 se réduisent à celles que nous avons trouvées. Tels sont donc les poids qu'il convient d'appliquer aux expressions $\theta_2\theta_3/r_1^3$, $\theta_1\theta_2/r_2^3$, $\theta_1\theta_2/r_3^3$ pour que la méthode proposée par M. Esclangon constitue un cas particulier de la méthode de Gauss.

5. Dans le passage de la première à la deuxième approximation, la variation de ρ_1 est, principalement,

$$\frac{A_1\frac{\mu\theta_1^2}{6r_1^3} + A_2\frac{\mu\theta_2^2}{6r_2^3} + A_3\frac{\mu\theta_3^3}{6r_3^3}}{A_1 + A_2 + A_3}$$

où

$$A_i = \theta_i \begin{vmatrix} \xi_i & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \eta_i & \beta_2 & \beta_3 \\ \zeta_i & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

L'erreur de première approximation est donc mesurée par la grandeur moyenne de la quantité sans dimensions

$$\varepsilon = \frac{\mu \theta_i^2}{6 r_i^3}.$$

Avec le demi-grand axe de l'orbite terrestre, la masse du Soleil et le jour solaire moyen pour unités de longueur, de masse et de temps,

$$\mu = 0{,}000\,295\,912.$$

Nous avons calculé

$$1/10^3 . \varepsilon$$

pour les distances r de cinq en cinq rayons moyens de l'orbite terrestre, jusqu'à $r = 50$, et pour des intervalles θ d'observations de dix en dix jours solaires moyens, jusqu'à $\theta = 240$. Voici le tableau des résultats; on y voit que, dès la distance héliocentrique de Jupiter, il n'est pas nécessaire que l'intervalle des observations extrêmes soit petit pour que la première approximation soit déjà très satisfaisante.

$\theta =$	10	20	30	40	50	60
$r =$ 5	25	6,3	2,8	1,6	1,0	0,7
10	203	51	23	13	8,1	5,6
15	684	171	76	43	27	19
20	1622	406	180	101	65	45
25	3168	792	352	198	127	88
30	5474	1369	608	342	219	152
35	8693	2173	966	543	348	242
40	12976	3244	1442	811	519	361
45	18476	4619	2053	1155	739	514
50	25345	6336	2816	1584	1014	705

$\theta =$	70	80	90	100	110	120
$r =$ 5	0,5	0,4	0,3	0,3	0,2	0,2
10	4,1	3,2	2,5	2,0	1,7	1,4
15	14	11	8,4	6,8	5,7	4,8
20	33	25	20	16	13	11
25	65	50	39	32	26	22
30	112	86	68	55	45	38
35	177	136	107	87	72	60
40	265	203	160	130	107	90
45	377	289	228	185	153	128
50	517	396	313	253	209	176

$\theta =$	130	140	150	160	170	180
$r =$ 5	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
10	1,2	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6
15	4,0	3,5	3,0	2,7	2,4	2,1
20	9,6	8,3	7,2	6,3	5,6	5,0
25	19	16	14	12	11	9,8
30	32	28	24	21	19	17
35	51	44	39	34	30	27
40	77	66	58	51	45	40
45	109	94	82	72	64	57
50	150	129	113	99	88	78

$\theta =$	190	200	210	220	230	240
$r =$ 5	0,1	0,1	0,1	0,1	»	»
10	0,6	0,5	0,5	0,4	0,4	0,4
15	1,9	1,7	1,7	1,4	1,3	1,2
20	4,5	4,1	4,1	3,4	3,1	2,8
25	8,8	7,9	7,2	6,5	6,0	5,5
30	15	14	12	11	10	9,5
35	24	22	20	18	16	15
40	36	32	29	27	25	23
45	51	46	42	38	35	32
50	70	63	57	52	48	44

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles

N° 71.

Esquisse de l'histoire des mathématiques et de l'astronomie en Belgique depuis 1830 (1)

par M. M. Alliaume (2)

Au début du XIX^e siècle, les sciences mathématiques et astronomiques se trouvaient en profonde décadence dans le pays qu'avaient illustré Simon Stevin, Grégoire de Saint-Vincent, Sluse, Mercator, Wendelin (3).

(1) Une première rédaction de cette Esquisse a paru dans le tome III de l'*Histoire de la Belgique contemporaine*, Bruxelles, Dewit, 1930.

(2) REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, 4^e série, t. 18 (1930, 2), p. 267.

(3) Les *sources* de l'histoire des mathématiques en Belgique à l'époque contemporaine se trouvent dans les recueils scientifiques dont la création sera signalée dans le texte de cet article, ainsi que dans les ouvrages suivants :

Les deux volumes d'A. Quetelet intitulés *Histoire des Sciences physiques et mathématiques chez les Belges* (Bruxelles, 1864) et *Sciences physiques et mathématiques chez les Belges au commencement du XIX^e Siècle* (Bruxelles, 1866) ;

Le *Livre commémoratif du centième anniversaire de l'Académie* (1872), avec le *Rapport séculaire sur les travaux mathématiques de l'Académie royale de Belgique* par J.-M. De Tilly, et le rapport intitulé *De l'astronomie dans l'Académie royale de Belgique*, par Éd. Mailly ;

Les *Annuaires* de l'Académie et les recueils de *Notices biographiques et bibliographiques des membres de l'Académie* (1854, 1874, 1886, 1896) ;

L'académie royale de Belgique depuis sa fondation (1772-1922), Bruxelles, 1922 : Section des sciences mathématiques et physiques, par P. Stroobant ;

Le recueil intitulé *Le mouvement scientifique en Belgique* (1905), avec les articles sur *Les sciences mathématiques* par P. Mansion, sur

Cette situation durait depuis plus de cent ans. « Quand arriva le commencement du XVIII^e siècle, dit Quetelet, le silence scientifique s'était répandu sur la Belgique ; deux ou trois hommes seulement témoignaient encore, par quelques écrits sur des branches toutes spéciales des sciences mathématiques, que l'esprit de recherches n'était pas complètement éteint dans notre patrie. POIGNARD, chanoine à Bruxelles, publia, en 1703, un livre sur les carrés magiques ; il cultiva aussi la géométrie ancienne avec quelque succès. Le montois Jacques LE POIVRE a su prendre un rang distingué parmi les savants de son temps. » Le Poivre a fait imprimer à Paris, en 1704, un petit ouvrage intitulé *Traité des sections du cylindre et du cône considérées dans le solide et dans le plan, avec des démonstrations simples et nouvelles.* On y trouve une manière originale de présenter et d'appliquer la méthode des transformations de De la Hire, par laquelle les propriétés reconnues dans le cercle sont transposées aux sections coniques. Cet ouvrage, qui eut une seconde édition en 1708, a été réimprimé à Mons en 1854.

L'Académie impériale et royale des sciences et belles-lettres, instituée en 1772 par l'impératrice Marie-Thérèse pour prendre la succession de la Société littéraire de Bruxelles, créée en 1769, avait été restaurée en 1816, sous le nom d'Académie royale des sciences et belles-lettres (1), au lendemain de la constitution du royaume des Pays-Bas. Un seul de ses membres faisait figure de mathématicien : le commandeur de Nieuport.

Charles-François le Prud'homme d'Hailly, vicomte de NIEUPORT, commandeur de Vaillampont, né à Paris en 1746, mort en 1827, semble avoir été un esprit original, capable de beaux travaux, mais la solitude intellectuelle restreignit son activité à des questions de peu d'envergure, dont l'étude ne devait pas laisser grande trace dans l'évolution des mathématiques.

Les sciences astronomiques et météorologiques par P. Stroobant, sur *L'observatoire royal* par J. Delvosal ;

Les Annuaires des universités et les *Libri memoriales* de diverses manifestations académiques.

(1) L'Académie devait subir une nouvelle réforme en 1845, où elle devint l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts, divisée en trois classes.

Dans le Recueil de l'ancienne Académie et dans les *Nouveaux mémoires* de l'Académie, il fit paraître quelques travaux sur la géométrie, la mécanique et le calcul des probabilités, ainsi qu'un curieux essai *Sur la métaphysique du principe de différentiation*, suite d'un ouvrage, publié à part, *Sur la théorie du raisonnement*. A l'Institut de France, dont il était correspondant, il a adressé des mémoires *Sur l'équation générale des polygones réguliers* et *Sur un problème de d'Alembert*. Mais le bibliographe du commandeur devrait principalement s'arrêter à trois mémoires *Sur l'intégration des équations aux différences partielles*. Les deux premiers ont été publiés dans les *Mélanges mathématiques*, ou *Mémoires sur différents sujets de mathématiques tant pures qu'appliquées*, qui parurent à Bruxelles, en deux volumes, l'un en 1794, l'autre en 1799. La troisième étude fut publiée à part en 1802. Celle-ci a pour objet ce que son auteur appelle l'intégrabilité médiate des équations différentielles : il s'agit des expressions qui se transforment en une différentielle exacte au moyen d'un facteur convenablement choisi, à savoir notre facteur intégrant.

Au nom du commandeur de Nieuport, on peut ajouter celui de R. Bournons, de Malines, officier au corps du génie, professeur au Collège thérésien de Bruxelles, mort en 1788. On lui doit un *Mémoire contenant la formation d'une formule générale pour l'intégration ou la sommation d'une suite de puissances quelconques dont les racines forment une progression arithmétique à différences finies quelconques*. Un *Mémoire sur le Calcul des probabilités* et un *Mémoire pour prouver que la méthode des limites n'est ni plus évidente ni plus rigoureuse que celle du calcul des infinis traitée suivant Leibniz ;* ces mémoires, lus à l'Académie (1783 et 1785), sont restés manuscrits et n'ont pas été retrouvés.

I. La génération de 1830

A la mort du commandeur de Nieuport, l'Académie avait déjà consacré les mérites de trois jeunes géomètres, Dandelin, Quetelet et Pagani, en les accueillant parmi ses membres en 1822, 1820 et 1825. Ces trois géomètres vont

constituer principalement la génération mathématique de 1830.

Germinal DANDELIN est né au Bourget, près de Paris, en 1794. Élève de l'École polytechnique, il en fut tiré par les événements des Cent-jours et prit part à la bataille de Waterloo. Il s'établit alors dans notre pays, qui était celui de sa mère. Naturalisé en 1817, il s'engagea dans l'armée des Pays-Bas, comme sous-lieutenant du génie, quitta le service en 1825 pour la chaire d'exploitation des mines à l'Université de Liége, prit une part active à la Révolution de 1830, rentra au génie avec le grade de lieutenant-colonel et enseigna la physique à l'Athénée de Namur. Il mourut en 1847.

Le point de départ des premiers travaux importants de Dandelin se trouve dans la dissertation doctorale de son ami Quetelet (1819), où est définie et étudiée, sous le nom de *focale*, une courbe nouvelle jouissant d'intéressantes propriétés. Son plus beau résultat est une démonstration simple et élégante d'une proposition déjà reconnue par Quetelet aux sections coniques. C'est ce qu'on appelle habituellement le théorème de Dandelin, et c'est à cette proposition et à quelques autres qui lui sont connexes que l'on donne encore aujourd'hui, à l'exemple de Th. Olivier (1847), le nom de *théorèmes belges* ; Hachette en a fait usage dans la seconde édition de son *Traité de Géométrie descriptive* (1828) : Si un cône est circonscrit à une sphère, tout plan tangent à la sphère coupe le cône suivant une conique qui a pour foyer le point de contact de son plan avec la sphère ; la droite d'intersection du plan sécant et du plan de la ligne de contact cône-sphère est la directrice correspondant à ce foyer.

Cette proposition fut encore utilisée par Dandelin dans plusieurs mémoires, mais, dit Quetelet dans la notice qu'il a écrite sur son ami, « de tous les ouvrages de Dandelin, le plus curieux est celui *Sur l'hyperboloïde de révolution et sur les hexagones de Pascal et de Brianchon* (1826). Ce petit mémoire est un chef-d'œuvre d'élégance géométrique ». En le reproduisant dans ses *Annales*, Gergonne ajoutait : « Ainsi se trouvent établis, sans calcul et par une sorte d'intuition, les deux théorèmes de Pascal et de Brianchon,

c'est-à-dire les plus importants peut-être de tous ceux qui composent la théorie des sections coniques ».

C'est par ses travaux de géométrie que son nom survivra ; il y a encore lieu de citer son mémoire *Sur la résolution des équations numériques* (1823), des *Leçons sur la mécanique et les machines* (1827) et un écrit de 1842 *Sur quelques points de métaphysique géométrique.*

Adolphe QUETELET, né à Gand en 1796, fit une carrière scientifique longue et heureuse. Professeur à l'Athénée et au Musée de Bruxelles, il renonça bientôt à ses aspirations littéraires et musicales pour se consacrer aux mathématiques. Membre de l'Académie en 1820, créateur et premier directeur de l'Observatoire royal, professeur à l'École militaire en 1834, secrétaire perpétuel de l'Académie depuis 1834 jusqu'à sa mort, en 1874, il eut la plus grande influence sur le développement des sciences en Belgique, et il est juste que son souvenir y soit soigneusement entretenu.

On a vu ci-dessus, à propos de Dandelin, quel a été l'objet de la dissertation inaugurale de Quetelet, en 1919, à l'Université de Gand : la focale est le lieu des foyers de toutes les sections coniques déterminées par un plan transversal tournant autour d'un point pris sur la surface du cône droit.

Joseph PLATEAU, le physicien gantois (1801-1883) que rendirent célèbre surtout ses belles et fécondes recherches sur la tension superficielle, a rencontré la focale dans une jolie expérience d'optique. « Si l'on suppose, écrivait-il à Quetelet en 1828, deux courbes brillantes quelconques tournant d'un mouvement uniforme, mais à une grande vitesse, dans deux plans parallèles, l'œil placé devant le système distinguera l'image immobile d'une troisième courbe plus sombre que le fond sur lequel elle se dessine... En prenant pour lignes mobiles deux droites, et en leur donnant des vitesses dont l'une soit double de l'autre, le spectre résultant est une focale. »

Un complément sur quelques propriétés nouvelles de la focale et d'autres courbes ouvrit à Quetelet les portes de l'Académie. Un mémoire sur la surface d'un polygone sphérique dont les côtés sont des arcs de grands ou de

petits cercles, et une *Nouvelle théorie des sections coniques considérées dans le solide* (1820), affirment sa situation scientifique. Dans ce dernier mémoire, l'auteur envisage un cône de révolution coupé par un plan, et le sommet du cône devient un point analogue à celui qu'on nomme foyer dans les sections coniques. Les rayons vecteurs sont menés du sommet du cône et l'on rentre dans la théorie ordinaire, quand le sommet vient à se placer dans le plan de la section. Par exemple, pour l'ellipse : la différence des deux rayons vecteurs menés du sommet du cône aux extrémités du grand axe de l'ellipse vaut la distance focale dans cette ellipse.

De 1823 à 1829, Quetelet a publié plusieurs mémoires sur les *caustiques par réflexion et par réfraction*. « Après avoir longtemps songé, dit-il, à la détermination des caustiques, j'avais été conduit à un principe d'un usage assez commode. L'idée première de ce principe consistait à considérer les caustiques comme des développées d'autres courbes beaucoup plus faciles à déterminer, soit par l'analyse, soit par des constructions graphiques... ». Voici l'application la plus générale de ce principe : « La caustique par réflexion ou par réfraction pour une courbe quelconque, éclairée par un point rayonnant, est la développée d'une autre courbe, laquelle a la propriété d'être l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe réfléchissante ou dirimante, et dont les rayons sont égaux aux distances des centres au point rayonnant dans le premier cas, et proportionnels à ces mêmes distances dans le second cas, le rapport constant étant l'indice de réfraction ». Par la considération de sphères enveloppées plutôt que de cercles, la théorie des lignes caustiques fut étendue aux surfaces.

Cette extension se fit avec la collaboration de Jean Alexis Timmermans (1801-1864), professeur au Collège de Gand, à l'Athénée de Tournai et à l'Université de Gand, membre de l'Académie en 1833. Timmermans publia dans les recueils de l'Académie et dans la *Correspondance mathématique* de nombreux travaux d'analyse, de géométrie et de mécanique. Il y a lieu de retenir : deux mémoires *sur les solutions*

singulières des équations différentielles (1842) et *sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles à coefficients variables* (1854), et des notes *sur la convergence des séries* (1846) ; des *Recherches sur la théorie des courbes déduites de leurs rayons de courbure successifs* (1828) ; des *Recherches sur la forme la plus avantageuse à donner aux ailes des moulins à vent* (1832). Le mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles applique une proposition analogue au théorème de Lagrange sur l'établissement de l'intégrale générale d'une équation différentielle à partir d'intégrales particulières de l'équation privée de son terme constant. Cette proposition est la suivante : Si l'on parvient à découvrir un certain nombre de fonctions qui, substituées à la variable dépendante, rendent identique une équation linéaire aux dérivées partielles de l'ordre n, après qu'on l'a privée de son terme final, l'intégrale générale de l'équation complète ne dépendra plus que de l'intégration de n équations aux dérivées partielles, du premier degré et du premier ordre.

En 1825, Quetelet fonda, avec J.-G. Garnier, la *Correspondance mathématique et physique*. Il fallait une belle confiance pour pousser jusqu'à pareille entreprise « le désir de propager le goût des sciences mathématiques et de donner aux personnes qui s'en occupaient dans le royaume les moyens de faire connaître leurs recherches ». Ces personnes étaient peu nombreuses, et la partie consacrée à la météorologie et à la statistique y occupa une place de plus en plus grande. Cependant d'illustres savants étrangers ne dédaignèrent pas d'y collaborer : Ampère, Chasles, Hachette, Hamilton, Poncelet. Cette publication se maintint jusqu'en 1839. — Elle nous a fait citer Jean-Guillaume Garnier. Né à Reims en 1766, collaborateur du cadastre français, où il contribua à la rédaction des Tables logarithmiques de Callet, puis professeur à l'École polytechnique, il fut nommé professeur à l'Université de Gand en 1816. Il écrivit de nombreux ouvrages didactiques. Parmi ses élèves, il eut la satisfaction de compter Quetelet, Verhulst, Timmermans, et quelques autres qui eurent leur heure de réputation : Jean Le Maire, professeur de mathématiques

à l'Université de Gand ; Éloy MANDERLIER, professeur à Namur et auteur de recherches sur les transversales. Garnier cessa d'appartenir à l'Université de Gand lors de sa restauration en 1831. Membre de l'Académie depuis 1818, il se retira à Bruxelles, où il mourut en 1840.

Quetelet occupa les chaires de physique et d'astronomie au Musée de Bruxelles, *Musée des Arts et de l'Industrie*, créé en 1826 et qui devait devenir une sorte d'Université industrielle. Ce projet était en voie de réalisation lorsque éclata la Révolution de 1830 ; le nouveau gouvernement estima que cet établissement ferait double emploi avec les autres institutions scientifiques et techniques du royaume.

C'est dans cet enseignement au Musée que Quetelet prit le départ pour ses travaux les plus importants : la fondation de l'Observatoire et la création d'une science nouvelle, la Statistique.

L'activité astronomique en Belgique à la fin du XVIII^e^ siècle et au début du siècle suivant est tellement faible qu'Éd. Mailly en est réduit à parler des membres de l'Académie qui se sont occupés d'astronomie « ou qui ont pris intérêt à cette science ». L'abbé CHEVALIER, membre de la Société littéraire en 1770, observa des éclipses, s'occupa de la découverte d'Uranus (1781) et du passage de Mercure sur le Soleil en 1782. L'anglais PIGOTT, que nous retrouverons à propos des premiers travaux géodésiques, a observé le passage de Mercure de 1786. L'abbé MANN a fait une étude sérieuse des marées sur la côte de Flandre « et dans presque tout l'océan germanique » (1773).

Les publications astronomiques de Quetelet débutèrent par des ouvrages élémentaires : une *Astronomie élémentaire* en 1826, une *Astronomie populaire* en 1827. En 1824, il avait entretenu l'Académie de l'établissement d'un observatoire en Belgique, et la compagnie prit ce projet en haute considération. En 1826, l'institution était décidée en principe, et le gouvernement acceptait l'offre de la Régence de Bruxelles de fournir le terrain, entre les portes de Schaerbeek et de Louvain, et de contribuer à la construction. L'adjudication des travaux eut lieu en 1827, et Quetelet, nommé astronome, fut chargé de l'achat des instruments :

un équatorial et un cercle mural furent commandés à Londres, chez Troughton et Simms, ainsi qu'une lunette méridienne, à Paris, chez Gambey, plus deux pendules astronomiques et des instruments magnétiques. Un conflit d'ordre financier entre le gouvernement et la Régence de Bruxelles suspendit les travaux, et la Révolution de 1830 rendit la situation de plus en plus difficile. La construction ne fut reprise qu'en 1832, et les observations s'organisèrent peu à peu.

Quetelet vécut à l'Observatoire pendant quarante-deux ans. Les premières observations portèrent sur la météorologie et la physique du globe. Deux jeunes gens remplissaient bénévolement les fonctions d'assistants. L'un était Édouard Mailly, qui devait devenir un érudit très distingué. Aide-calculateur à l'Observatoire et secrétaire du directeur (dont il devait être le biographe), professeur à l'École militaire jusqu'en 1869, correspondant de l'Académie en 1867 et membre en 1876, il publia un grand nombre de travaux dont la plupart ont un caractère historique. Une note du début de cette étude a signalé son rapport séculaire sur les travaux astronomiques de l'Académie. On recourra encore utilement à ses *Études pour servir à l'histoire des Sciences et des Lettres en Belgique pendant la seconde moitié du XVIII*e *siècle* (Mémoires de l'Ac., 1876) et à son *Tableau de l'Astronomie dans l'hémisphère austral et dans l'Inde* (Mém. Ac., 1872). Parmi ses travaux techniques : *Sur les marées en différents points des côtes de Belgique* (Mém. Ac., 1838) ; *La collimation d'une lunette méridienne* (Bull. Ac., 1848) ; *Principes de la science du calcul* (Encyclopédie populaire, 1850).

Nommé directeur de l'Observatoire, Quetelet obtint la publication d'un *Bulletin*. Un cercle répétiteur de six pouces de rayon fut employé à tenter une détermination de la latitude, par le passage de la Polaire, et un télescope, don du roi Guillaume, permit d'observer des occultations d'étoiles et des éclipses des satellites de Jupiter.

Le premier *Annuaire* de l'Observatoire parut en 1834, ainsi que le tome Ier de ses *Annales*. Celui-ci rapportait les observations magnétiques et météorologiques et celles

des températures du sous-sol avec le relevé des variations diurnes et annuelles du thermomètre en fonction de la profondeur. En 1835, à la demande de Whewell, le géophysicien de Cambridge, furent entreprises des mesures de hauteurs de marée sur notre côte, et, à l'invitation de John Herschel, des observations météorologiques horaires aux solstices et aux équinoxes.

A cette époque des premiers chemins de fer, les cadrans solaires devenaient insuffisants au réglage des horloges. Un arrêté royal de 1836 prescrivit l'établissement d'un petit observatoire avec lunette méridienne à Anvers, Bruges, Ostende, Gand. De plus, des méridiennes devaient être tracées « dans les murs des cathédrales, hôtels de ville et autres édifices favorables à leur établissement, dans les autres villes de quelque importance ». En 1836, Quetelet traça la méridienne de Bruxelles dans l'église Sainte-Gudule, celle de Termonde dans l'église Notre-Dame. On ne fit pas davantage : le télégraphe allait permettre la distribution de l'heure dans tout le pays, à partir de l'Observatoire.

L'insuffisance du personnel ne permettait pas les grandes observations astronomiques. Il fallut encore, en 1841, se rabattre sur les phénomènes périodiques de la végétation. En 1849 furent publiées les recherches sur l'électricité atmosphérique, très appréciées, puis les travaux sur les ondes atmosphériques. En ce qui concerne ceux-ci, il y avait non seulement l'intérêt des résultats, mais aussi, et surtout, l'intérêt et la nouveauté des méthodes. C'est à Quetelet que sont dues les représentations qui nous sont aujourd'hui les plus familières. Dans l'*Annuaire* de la *Société météorologique de France* pour 1867, nous trouvons ce témoignage : « De nombreuses tentatives ont été faites pour saisir les phénomènes météorologiques sur de grandes étendues et les suivre à la surface de la Terre. Plusieurs ont donné naissance à des théories célèbres. L'une des plus remarquables et des plus connues est celle des ondes atmosphériques, due à M. Quetelet. Ce savant marque sur une carte tous les points où le baromètre passe en même temps par un maximum ou un minimum, et il joint ces

points par une ligne courbe. Les courbes se déplacent les jours suivants en obéissant à des lois que M. Quetelet s'est attaché à déterminer ».

Les observations systématiques d'astronomie purent enfin commencer en 1847. C'est à cette époque que fut entreprise la mesure de la différence des longitudes des observatoires de Greenwich et de Bruxelles. En 1848, commença l'étude des étoiles à mouvements propres. Parmi les dernières publications dues aux travaux de l'Observatoire, il faut citer *Sur la Physique du globe*, qui constitue le tome XIII des *Annales* (1861), et la *Météorologie de la Belgique comparée à celle du globe* (1867).

A partir de 1856, le directeur de l'Observatoire fut secondé par son fils, Ernest QUETELET (1925-1878), sorti de l'École militaire en 1848, sous-lieutenant du génie et auteur de quelques travaux de géométrie. Son premier mémoire (1852) est intitulé *Recherches sur les médianes*. L'auteur appelle premier médian d'une droite, par rapport à une surface, un point de cette droite tel que la somme algébrique de ses distances aux différents points d'intersection de la droite et de la surface soit égale à zéro. Il appelle deuxième médian le point pour lequel est nulle la somme des produits deux à deux des mêmes distances ; et ainsi de suite. La droite considérée appartient à une congruence, et les lieux des différents points médians sont des surfaces appelées médiane première, médiane deuxième, etc.

Un travail de 1854 est intitulé *Mémoire sur les foyers :* ici la dépendance de la surface donnée et de la surface définie est caractérisée par la condition que la distance de chaque point de l'une à chaque point de l'autre est exprimée d'une manière rationnelle en fonction des coordonnées du point de la surface donnée. Correspondant de l'Académie en 1855, membre en 1863, Ernest Quetelet consacra le reste de sa vie aux travaux de l'Observatoire. Il participa à la détermination de la différence des longitudes de Bruxelles et de Berlin, et entreprit la rédaction d'un catalogue des étoiles à mouvements propres. Les premiers essais de ce grand travail furent présentés à l'Académie en 1859 et en 1863. Ernest Quetelet revint à la géométrie en 1858, avec le théorème suivant : « Toutes les

courbes du troisième ordre qui passent par huit points passent par un neuvième point ». A la mort de son père, il remplit l'interim de la direction de l'Observatoire, et, après la désignation du nouveau directeur, fut nommé chef du service astronomique.

En dehors de l'Observatoire, des travaux astronomiques dignes de mémoire ont été exécutés par Charles MONTIGNY (1819-1890) qui s'est fait une spécialité de la scintillation des étoiles. Ses premières recherches datent de 1853 : pour lui la cause du phénomène se trouve dans les perturbations de l'atmosphère le long des divers chemins suivis par les diverses radiations, qui, avec des indices de réfraction différents, constituent la lumière de l'étoile. Correspondant de l'Académie depuis 1857, membre depuis 1867, il continua de publier jusqu'en 1888. Son dernier mémoire décrit une nouvelle disposition du *scintillomètre*, au moyen duquel il évaluait l'intensité de la scintillation.

A l'étranger, Adolphe Quetelet est surtout connu comme créateur de la *Statistique* scientifique. Son premier travail dans cet ordre d'idées date de 1825 : *Mémoire sur la loi des naissances et de la mortalité à Bruxelles*. Puis ce furent ses *Recherches sur la population... dans le royaume des Pays-Bas* (1827), ses *Recherches sur la loi de croissance de l'homme* (1831), ses *Recherches sur le penchant au crime aux différents âges* (1831), et un grand nombre d'autres mémoires. C'est dans ses travaux de 1831 que Quetelet introduisit les notions qui tendaient à faire de la statistique une sorte de mécanique sociale, en particulier cette notion d'homme moyen qui a donné lieu à tant de discussions. Nous n'insisterons pas sur ces études qui ressortissent plutôt à la sociologie, mais il faut citer les deux ouvrages capitaux de Quetelet dans cette voie : *Sur l'homme et le développement de ses facultés* ou *Essai de physique sociale* (1835), et *Du système social et des lois qui le régissent* (1848).

Enfin, secrétaire perpétuel de l'Académie depuis 1834 jusqu'à sa mort, Ad. Quetelet publia un grand nombre de rapports et de notices. Il se fit aussi historien des mathématiques en écrivant, outre plusieurs biographies, deux ouvrages importants : *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* (1864) et *Sciences physiques et*

*mathématiques chez les Belges au commencement du XIX*e *siècle* (1866).

Le troisième des mathématiciens les plus honorables de la génération de 1830 fut Pagani. Michel PAGANI est né dans le Piémont en 1796. Entraîné dans le mouvement pour l'indépendance de l'Italie, il se réfugia à Bruxelles en 1822. Il répondit avec succès, en 1824, à une question de concours de l'Académie sur les lignes spiriques, intersections du tore et de plans, puis, en 1825, à une question sur la dynamique des systèmes flexibles, et fut nommé membre de cette compagnie. Après un mémoire sur les vitesses virtuelles, et naturalisé Belge, il fut désigné, en 1826, pour occuper la chaire de mathématiques à l'Université de Louvain, université de l'État depuis 1817. En 1827 et 1828, Pagani donna deux mémoires, l'un *Sur l'équilibre des systèmes flexibles*, l'autre *Sur le développement des fonctions arbitraires en séries dont les termes dérivent de la même fonction continue*. « Il s'agissait ici de développer tous les coefficients des termes d'une série qui dérive d'une même fonction, d'après une certaine loi, de manière que la somme de tous ces termes fût égale à la valeur d'une fonction arbitraire donnée, pour toutes les valeurs de la variable comprises entre deux limites connues » ; cette question avait déjà fait l'objet des recherches de Lagrange et de Fourier.

En 1831, le gouvernement provisoire supprima l'enseignement des mathématiques à l'Université de Louvain, et Pagani passa à l'Université de Liége (1). C'est dans un travail

(1) L'Université séculaire de Louvain avait été supprimée en 1797 par un arrêté de l'administration centrale du département de la Dyle. L'instruction supérieure ne reçut un commencement de réorganisation qu'après la réunion du pays à la Hollande, par l'établissement, en 1817, des universités de Louvain, de Liége et de Gand. Le gouvernement de 1830 « abrogea tous les arrêtés du roi Guillaume incompatibles avec le nouveau régime. Les trois universités furent provisoirement conservées ; mais elles n'échappèrent à la crise que pour être mutilées. Liége perdit sa faculté de philosophie ; Gand ne conserva que celles de droit et de médecine ; les facultés des sciences et de droit cessèrent d'exister à Louvain ». L'université de l'État à Louvain fut supprimée en 1835, et remplacée par l'Université catholique fondée à Malines en 1834.

de 1832 *Sur la théorie des projections algébriques et sur son application au mouvement de rotation d'un corps solide* que Pagani introduisit dans l'étude des courbes gauches la considération du trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale, et auquel l'enseignement d'aujourd'hui donne le nom de trièdre de Frenet. Des *Recherches sur l'intégration d'une classe d'équations aux différentielles partielles* (1834) précédèrent de nouveaux mémoires sur l'équilibre des systèmes flexibles, un article sur l'équation exponentielle et un écrit intitulé *Quelques transformations générales de l'équation fondamentale de la Mécanique* (1839).

En 1835, l'université de l'État à Louvain avait fait place à l'Université catholique ; Pagani y revint assumer l'enseignement des mathématiques, et y rédigea ses derniers travaux. Il mourut en 1855.

Élève de Garnier à l'Université de Gand, Pierre-François Verhulst (1804-1849) cultiva d'abord le calcul des probabilités sous la direction de Quetelet, et enseigna l'analyse au Musée de Bruxelles, puis, à partir de 1834, à l'École militaire. C'est en 1841 qu'il publia son principal ouvrage : *Traité élémentaire des fonctions elliptiques*, destiné à faire suite aux traités élémentaires de calcul intégral. Il faisait entrer ainsi dans le domaine de l'enseignement « une série de travaux de haute analyse qui se trouvaient disséminés dans différentes collections et écrits dans différentes langues ». Professeur à l'Université de Gand, membre de l'Académie en 1841, Verhulst collabora aux recherches statistiques de Quetelet ; c'est ainsi qu'il écrivit les deux mémoires (1844 et 1846) intitulés : *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population.* Étudiant le mode d'action des obstacles au développement de la population, il concluait que ces obstacles augmentent proportionnellement au rapport de la population surabondante à la population totale : d'après ce principe, la population de la Belgique aurait une limite supérieure de 9 400 000 habitants.

A l'activité mathématique de la même époque appartiennent les travaux d'Auguste Pioch (1811-1846), professeur d'analyse à l'École militaire, sur les fonctions symé-

triques, la résolution des équations et la représentation des fonctions par des intégrales doubles.

II. La deuxième génération

Cette classification en *générations* est plus commode que logique. Dans la deuxième génération, on va placer les mathématiciens dont les principaux travaux virent le jour entre 1850 et 1880. Les noms les plus éminents de cette époque sont ceux de Brasseur, Lamarle, Catalan, Schaar, Liagre, Houzeau.

Jean-Baptiste Brasseur est né en 1802, à Esch-sur-l'Alzette, alors que le Luxembourg germanique faisait partie de notre pays. Lecteur en 1832 et, en 1837, professeur à l'Université de Liége, il fut élu correspondant de l'Académie en 1847, membre en 1855. Son premier ouvrage est un *Programme de géométrie descriptive* (1837). Il écrivit de nombreux mémoires de géométrie, tous animés du même esprit, celui que révèle le titre d'un de ses principaux travaux, *Sur une nouvelle méthode d'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue* (1855), ou le titre de celui-ci : *Application des projections cotées à diverses recherches sur l'étendue* (1841). Mais on doit se demander si c'est vraiment la géométrie descriptive, telle que nous l'entendons aujourd'hui, qui fut pour Brasseur un moyen de découverte.

Quoi qu'il en soit, voici les points fondamentaux de sa méthode, tels que les indique son biographe, le général Liagre (Annuaire Académie, 1869) : « La conception de Brasseur rentre dans cette méthode générale que Chasles appelle méthode de transmutation des figures, et qui consiste à transformer, au moyen de certaines conventions, une figure en une autre, et à déduire des propriétés connues de l'une les propriétés inconnues de l'autre. Les propriétés des plans bissecteurs le conduisent à déterminer immédiatement, au moyen de deux projections de certaines lignes arbitrairement tracées sur une surface, les sections planes de cette surface et, réciproquement, à déterminer le degré d'un lieu donné par deux systèmes de lignes. Ainsi, si une droite se meut tangentiellement à une courbe plane, ses deux

projections se coupent sur une droite. La réciproque permet de prouver qu'une courbe est plane, preuve dont Chasles a paru vouloir contester la possibilité à la géométrie descriptive. Les mêmes principes le conduisent à des procédés généraux de déformation des courbes... Jusque là Brasseur ne s'est servi que de relations purement descriptives : il va y joindre une seule relation métrique, la proportion ; et cette simple relation acquiert entre ses mains la même puissance que le rapport anharmonique appliqué aux faisceaux projectifs ou homographiques de Steiner et de Chasles ».

Liagre termine de la manière suivante l'éloge du géomètre dont il vient d'étudier les travaux : « Une seule considération nous empêche d'assigner avec confiance la place que doit occuper la méthode de Brasseur dans le système des sciences géométriques : c'est qu'elle part de propriétés dans l'espace pour arriver à des propriétés dans le plan. Son emploi exige qu'on étudie parfaitement une surface de même degré au moins que le lieu géométrique dont on étudie les propriétés ; qu'on fasse un choix convenable parmi les modes de génération de cette surface ; qu'alors enfin on applique (et encore judicieusement) les procédés que Brasseur a si bien développés. Le rapport anharmonique et l'involution nous paraissent, à ce point de vue, des méthodes plus logiques de géométrie supérieure ».

Nous ne pouvons qu'indiquer les travaux de Brasseur sur la mécanique rationnelle, pour arriver à son *Exposition nouvelle des principes du Calcul différentiel et intégral*, publiée par Folie après sa mort, en 1868. Il faut rapprocher ce mémoire des discussions retentissantes dont la notion de différentielle devait faire l'objet, quelques années plus tard, dans les milieux de l'enseignement supérieur de notre pays.

Quoique Français, né à Calais, élève de l'École polytechnique, puis ingénieur des ponts et chaussées à Arras, Ernest Lamarle (1806-1875), professeur à l'Université de Gand de 1838 à 1867, associé de l'Académie depuis 1847, appartient à l'histoire des mathématiques dans notre pays. Ses travaux se rapportent à l'analyse, à la géométrie, à la mécanique. Dans une *Note sur la métaphysique du Calcul*

différentiel (1843) qui fut suivie d'un *Essai sur les principes fondamentaux de l'Analyse transcendante* (1845), il présente cette conception que « le point générateur d'une courbe, se trouvant à la fois sur la tangente et sur la courbe, se meut sur la tangente, tandis que la tangente s'infléchit par un mouvement de rotation dont ce point reste toujours le centre ». Les premières applications de cette notion ont été faites par l'auteur dans les théories des rayons et des centres de courbure, des centres et axes instantanés de rotation et des roulettes, puis dans l'étude des courbes gauches et de leur torsion : ces applications, ainsi qu'une étude approfondie de la courbure des surfaces, ont été publiées dans de nombreux mémoires. « Le résumé et le couronnement » de ses recherches se trouve dans son *Exposé géométrique du Calcul différentiel et intégral* (1861-1863). Pour l'auteur, « la différentielle d'une grandeur quelconque, sans cesse variable, est la vitesse du point qui décrit le segment de droite substitué, comme équivalent numérique, à cette même grandeur, ce segment de droite étant limité à une extrémité par un point fixe, à l'autre par le point mobile que l'on considère. Il en résulte ce qu'il faut entendre par différentiation d'une équation, et, inversement, par intégration d'une équation différentielle. Le corps de l'ouvrage est consacré aux applications du calcul différentiel à l'analyse et à la géométrie.

Les travaux de Lamarle ont été discutés par le général De Tilly. La part que cet auteur a prise lui-même dans les discussions relatives aux principes de l'Analyse infinitésimale rend intéressante son opinion sur la méthode de Lamarle : « Nous ne pensons pas, dit-il, que la méthode de Lamarle puisse jamais s'introduire dans la science, pour l'exposition du calcul différentiel, parce que la méthode des infiniment petits, considérés comme étant des variables dont la limite est zéro, est beaucoup plus simple et tout aussi rigoureuse. Néanmoins, nous persistons à croire que l'application des procédés tout géométriques indiqués dans le mémoire que nous venons d'analyser, pourra rester utile, non seulement dans la théorie de la courbure, mais en outre chaque fois que l'on voudra mieux suivre la solution d'un problème d'un bout à l'autre pour en découvrir

le point obscur ou douteux; tandis que, dans les expressions analytiques, il arrive quelquefois, d'après une expression spirituelle de Lamarle lui-même, que l'on ne voit clairement que le point de départ et le point d'arrivée, le reste s'accomplissant comme « un voyage nocturne » (Ann. Acad., 1879). Ajoutons que dans son *Étude approfondie sur deux équations fondamentales du calcul différentiel* (1855), Lamarle a cherché à démontrer l'existence de la dérivée pour toutes les fonctions continues : « les travaux de Riemann, de Weierstrass et de leurs disciples ont fait connaître les restrictions importantes que cette proposition doit subir ».

Il y a encore lieu de citer les travaux de Lamarle sur la convergence de la série de Taylor pour le développement d'une fonction donnée, et de nombreuses recherches de mécanique. Plusieurs de celles-ci ont pour objet l'étude des lames rétractiles des liquides, inspirées des belles expériences de Plateau, dont il fut le collaborateur mathématicien ; une autre est consacrée au mouvement par rapport à des axes liés à la Terre. C'est ainsi que Lamarle a pu établir qu'il avait prévenu Foucault dans une expérience sur l'orientation de l'axe du gyroscope parallèlement à l'axe terrestre. Ceci est lié aux travaux de Gilbert sur la même question et à l'invention du barogyroscope de celui-ci.

Bien que né à Bruges, en 1814, et professeur à l'Université de Liége de 1865 à 1884, Eugène Catalan, ancien élève de l'École polytechnique, fondateur de l'École préparatoire Sainte-Barbe, répétiteur et examinateur à l'École polytechnique, était Français, et la plus grande partie de sa carrière s'est passée en France. « La carrière de Catalan se divise naturellement en quatre périodes de durées inégales, dont la première commence en 1835 pour se terminer en 1852 ; la deuxième s'étend jusqu'à sa nomination à l'Université de Liége en 1865 ; la troisième comprend les années de son professorat, jusqu'en 1884 ; la quatrième les dix dernières années de sa vie », jusqu'en 1894. « La première période, poursuit son biographe, P. Mansion (Ann. Acad., 1896) est caractérisée par un grand nombre de mémoires où il aborde et résout, souvent avec un rare bonheur, diverses questions d'analyse et de géométrie

infinitésimale, alors à l'ordre du jour chez les géomètres. Dans la deuxième, ce sont les publications d'un caractère à la fois pédagogique et scientifique qui prédominent ; dans la troisième, plus libre de son temps et de son travail, Catalan se laisse aller à ses propres inspirations et suit davantage une voie originale. Enfin, dans la quatrième, il rassemble et complète un grand nombre de ses écrits antérieurs sur les sujets les plus divers et publie sur les polynomes de Legendre des recherches originales dignes des années les plus fécondes de sa vie scientifique. » On voit que son influence a dû être grande sur l'enseignement des mathématiques dans notre pays. Nous préciserons ceci en signalant d'abord ses *Remarques sur la théorie des moindres carrés*, publiées chez nous en 1878, son *Cours d'analyse de l'Université de Liége* (1870, 1880), et la fondation, avec Mansion, en 1874, de la *Nouvelle Correspondance mathématique*. Mais ses travaux les plus importants sont relatifs aux élassoïdes (1855), aux polyèdres (1862), aux produits infinis et aux polynomes de Legendre.

Les élassoïdes sont les surfaces dont l'aire est minimum ; réalisées par Plateau, elles avaient déjà été étudiées par Lamarle. Lagrange a donné leur équation aux dérivées partielles ; Monge, leur équation finie, sous diverses formes qui la rendent pratiquement inutile. Meusnier a prouvé qu'elles ont, en chaque point, leurs rayons de courbure principaux égaux et de signes contraires ; « de plus, il a trouvé deux élassoïdes spéciaux, le caténoïde, engendré par la révolution d'une chaînette tournant autour de sa directrice, et la surface de vis à filet carré ou conoïde hélicoïdal. Scherk, un demi-siècle après, en découvrit cinq autres... La question en était là quand Catalan l'aborda. Du premier coup, par une voie intuitive, il établit ce théorème : « Le conoïde hélicoïdal est le seul élassoïde réglé ».

Dans l'étude des polyèdres, il s'agit principalement des polyèdres semi-réguliers, qui ont des faces régulières et des angles égaux, ou des angles réguliers et des faces égales. « Pappus a fait connaître sommairement et Kepler a décrit en quelques pages treize polyèdres semi-réguliers du premier genre, dont l'invention remonte à Archimède. Catalan prouve qu'il y a, non pas treize, mais quinze polyèdres du

premier genre et pas davantage, que les deux nouveaux ont une infinité de formes, qu'ils sont tous inscriptibles (dans une sphère). Il démontre l'existence de quinze polyèdres semi-réguliers du second genre, lesquels sont circonscriptibles (à une sphère) et conjugués des premiers ».

Dans ses *Recherches sur quelques produits infinis*, auxquelles va surtout l'admiration de Mansion, Catalan décompose les expressions à étudier en un produit de plusieurs expressions du même genre. Les facteurs et leur produit étant transformés en séries, il obtient un produit de plusieurs suites infinies égal à une autre suite infinie, résultat d'où découlent une foule d'identités : à chacune d'elles correspond un théorème d'arithmétique supérieure. Ces recherches sur les produits infinis ont pour origine les importants travaux de Catalan sur les fonctions elliptiques : dans l'un d'eux, il a établi que l'équation différentielle elliptique peut se ramener à une équation de Clairaut. Cayley expose cette réduction dans son *Traité des fonctions elliptiques*, mais l'attribue à Walton, qui ne l'a publiée qu'un an plus tard.

Il existe aussi, devenue classique, une *méthode de Catalan* pour la détermination des intégrales multiples. « Catalan y a été conduit à propos de l'aire d'un ellipsoïde. Cette aire s'exprime par une intégrale double qui représente aussi le volume d'un certain cylindre. Décomposez celui-ci, d'une certaine manière, en couches cylindriques concentriques, et l'intégrale double se transforme en une intégrale simple, réductible aux intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce ».

Les progrès que Catalan fait faire à l'étude des polynomes de Legendre (de 1876 à sa mort) constituent son « œuvre capitale pendant les dernières années de sa vie. Il se joue des difficultés avec une habileté consommée au milieu de ces formidables formules analytiques qu'il rapproche, combine et compare, de manière à en faire jaillir sans cesse de nouveaux résultats... ».

Mathias Schaar est né à Luxembourg en 1817. Successivement professeur aux Universités de Gand, de Liége et de Gand encore jusqu'à sa mort en 1867, membre de l'Académie royale depuis 1851, il s'est fait connaître par

de beaux travaux sur les intégrales eulériennes (1848) et sur l'arithmétique supérieure (1847, 1849 et 1850). Dans ce dernier domaine, il s'est attaché principalement à la théorie des *résidus quadratiques*, déjà cultivée par Gauss qui l'a mise à la base de la résolution des équations indéterminées du second degré (1). Quant aux eulériennes, il a publié sur ces fonctions « plusieurs notes dont les résultats sont devenus classiques ; pour la formule de Stirling, en particulier (1846), il a indiqué une limite supérieure de l'erreur qu'elle comporte quand on s'arrête à un terme convenablement choisi. Ces recherches furent poursuivies par H. Limbourg (1833-1860), auteur de la *Théorie de la fonction gamma* (1859), et les mêmes questions et des questions connexes furent traitées par Le François en 1839 et en 1852.

Luxembourgeois comme Schaar, Michel Steichen (1804-1891), correspondant de l'Académie en 1861, titulaire en 1868, fut professeur de mécanique à l'École militaire de 1837 à 1872. Il a laissé quelques mémoires de statique et de graphostatique, et une étude sur la vie et les travaux de Simon Stevin ; son livre intitulé *Un supplément à la géométrie destiné à servir d'introduction à l'étude de la mécanique* (Bruxelles, 1855) ne mérite pas l'oubli dans lequel il est tombé.

(1) Il est sans doute utile de rappeler en quoi consistent les résidus quadratiques de Gauss, de peur de confusion avec des expressions qui peuvent porter le même nom dans la théorie des erreurs.

N étant un nombre entier quelconque et p un nombre premier (autre que 2), $N^{\frac{p-1}{2}}$ divisé par p laisse le reste $+1$ ou -1. Ce reste s'écrit $\left(\frac{N}{p}\right)$, de sorte que

$$\left(\frac{N}{p}\right) = +1 \text{ ou } -1.$$

Dans le premier cas, p divise $(x^2 - N)$, quel que soit x, et on dit que N est un résidu quadratique de p ; dans le second cas, on dit que N est un résidu non quadratique de p.

Le premier mémoire de Schaar renferme une démonstration nouvelle de la *loi de réciprocité*, due à Gauss, qui existe entre deux nombres premiers, p et q. Cette loi s'exprime par l'identité suivante:

$$\left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} = \left(\frac{p}{q}\right).$$

Il faut signaler ici L. HOUTAIN (1828-1880) à la mémoire de qui Mansion a écrit les lignes suivantes : « L'injustice des hommes a empêché Houtain d'arriver à l'enseignement supérieur ; mais son livre, le plus savant et le plus rigoureux que l'on eût jamais publié sur l'analyse à l'époque où il a paru (1853), prouve qu'il était plus digne d'occuper une chaire d'analyse que plusieurs de ses contemporains. Ce livre est intitulé : *Théorie des solutions singulières des équations différentielles et aux dérivées partielles* ».

Né à Tournai en 1815, sorti de l'École militaire en 1839, premier de la première promotion, successivement répétiteur, inspecteur des études, professeur, examinateur permanent, directeur des études et commandant de cette école, ministre de la Guerre en 1879, secrétaire perpétuel de l'Académie jusqu'à sa mort, en 1891, Jean LIAGRE rendit les plus grands services à la science et à son pays. Ses principaux travaux concernent l'astronomie et la topographie. Aide bénévole de Quetelet à l'Observatoire, il diminua les chances d'erreur dans l'emploi du niveau à bulle (1844), détermina la collimation de la lunette méridienne par une méthode qui n'exige pas le retournement de l'instrument (1845), proposa l'établissement de l'heure et de la latitude par des mesures d'azimuts plutôt que de distances zénithales (1848, 1853, 1854), établit les règles de compensation de la discordance constatée dans un côté géodésique commun à deux chaînes de triangles (1852), créa le sextant à un seul miroir, et provoqua la substitution des mesures stadimétriques aux mesures à la chaîne dans les travaux du Dépôt de la guerre (1853, 1854). Il écrivit, en 1852, sur *le Calcul des probabilités et la théorie des erreurs* un livre qui a gardé toute sa valeur : « L'auteur y applique la théorie des moindres carrés à des exemples tirés de l'astronomie, de la météorologie, de la balistique..., mais particulièrement de la haute topographie et de la géodésie » (1).

(1) Le général Liagre fut le biographe de Brasseur (1868), et voici un extrait de son jugement sur la méthode du géomètre de Liége : « Sans doute, il n'a pas su se dépouiller entièrement de quelques idées un peu trop particulières qu'il avait reçues dans sa jeunesse. Ainsi, par exemple, lorsqu'il prend, comme presque tous les

Le général Liagre a publié aussi un *Traité élémentaire de Topographie* et des manuels de géométrie et d'astronomie à l'usage des débutants. On pourrait donner à la question suivante le nom de problème de Liagre (1850) : Quels sont les couples de points situés sur un axe de section conique et tels que les rayons vecteurs menés des points de chaque couple à un même point de la courbe sont liés entre eux par une relation indépendante de la position de ce dernier point ?

Nous avons assisté à la fondation de l'Observatoire. Après la mort d'Adolphe Quetelet, en 1874, et l'intérim de son fils, la direction fut confiée à Houzeau. Jean-Charles Houzeau est né à Mons en 1820. Incapable de se plier à la régularité qu'imposent les programmes scolaires, il organisa ses études à sa façon, à l'Université de Bruxelles, à l'École des mines de Mons, à la Faculté des sciences de Paris. Dès 1842, il se mit en évidence par de beaux travaux sur l'aberration de la lumière, et entra à l'Observatoire, en 1846, en qualité d'aide-astronome. Son zèle donna aux recherches astronomiques de cet établissement une activité qui lui avait manqué jusqu'alors. Compromis dans le mouvement républicain de 1848, Houzeau fut révoqué. Les voyages qu'il entreprit alors ne l'empêchèrent pas de publier : en 1854, son *Essai d'une géographie physique de la Belgique* fit sensation. A cette époque, il fut attaché au Dépôt de la guerre qui assumait, comme on le verra tantôt, la confection de la carte générale du pays : il y fut chargé de la partie astronomique du travail. L'*Histoire du sol de l'Europe* parut en 1857. Cette année même, et après sa nomination de professeur de géologie à l'Université de Bruxelles, il quitta l'Europe pour l'Amérique, où il devait

auteurs, les *traces* d'un plan pour *représenter sa position*, il oublie qu'il n'y a en géométrie descriptive qu'un seul mode de représentation, savoir les projections. Il aurait dû dire que l'on représente un plan par les projections des éléments de sa génération : or ces éléments sont rarement les traces ». — Ceci nous montre Liagre précurseur de Mannheim, professeur à l'École polytechnique de Paris, qui refit la géométrie descriptive en supprimant la ligne de terre ; la méthode de Mannheim, qui l'emporte aujourd'hui, fut d'abord adoptée chez nous par Chomé, à l'École militaire, et par N. Breithof, à l'Université de Louvain.

passer dix-neuf années. Dans le Texas, il s'employa à divers travaux d'arpentage et d'irrigation, et prit une concession à la frontière mexicaine. Chassé de ses terres par la guerre de Sécession, il assuma, à la Nouvelle-Orléans, la direction d'un journal rédigé en français ; il y lutta dans les rangs du parti abolitionniste, ce qui le mit, à plusieurs reprises, en situation périlleuse. En 1868, il s'établit à la Jamaïque. Pendant toutes ces années mouvementées Houzeau n'a pas cessé d'adresser de nombreux articles à diverses publications belges et américaines ; plusieurs sont consacrés à des observations astronomiques et météorologiques ; il y eut, en particulier : *Le ciel mis à la portée de tout le monde*, et l'*Uranométrie générale*. Ce dernier ouvrage (1874) est un catalogue de près de 6 000 étoiles, observées à l'œil nu, sur toute la surface de la sphère céleste, avec un atlas où toutes ces étoiles sont rapportées de position et figurées de grandeur. C'est à ce grand travail qu'il dut l'offre qu'on lui fit d'assumer la succession de Quetelet. Il revint en Europe en 1876, et prit la direction de l'Observatoire. Il le transforma, et ce n'est guère qu'à partir de cette époque que le service astronomique fonctionna régulièrement.

Mais l'emplacement de l'Observatoire, autour duquel la ville s'était étendue, avait cessé d'être satisfaisant. Houzeau proposa son transfert en dehors de l'agglomération : cette proposition fut approuvée, et le nouvel Observatoire fut édifié au sud de la ville, à Uccle, dans une situation extrêmement favorable.

En même temps, une distinction plus nette était faite entre le service astronomique et le service météorologique. A la première série des *Annales*, publiée par Quetelet de 1830 à 1878, succédait une nouvelle série où les travaux étaient distribués entre les *Annales astronomiques* et les *Annales météorologiques* ; e premier volume des Annales astronomiques renferme l'*Uranométrie générale* de Houzeau ; il renferme aussi, du même auteur, un *Répertoire des constantes de l'Astronomie*, dont une nouvelle édition devait, en 1882, prendre le titre de *Vade-mecum de l'astronome*.

Houzeau quitta la direction de l'Observatoire en 1883 ; nous rencontrerons les noms de ses successeurs. Avec la collaboration de A. Lancaster, il a consacré les derniers

jours de sa vie, qui devait se terminer en 1888, à la préparation d'une *Bibliographie générale de l'Astronomie*, dont le projet comporte trois volumes : un premier volume parut en 1882 ; une deuxième partie, publiée par les soins de Lancaster, a vu le jour en 1889.

On voudrait maintenant décrire les opérations géodésiques dont notre pays a été le théâtre au début de son indépendance. Depuis l'époque de Mercator, une seule carte originale de la Belgique avait vu le jour, en 1717 ; elle était bien médiocre. De 1772 à 1777, sur l'ordre de l'impératrice Marie-Thérèse, le général autrichien FERRARIS dressa une carte nouvelle : elle était au 1/86 400, et réalisait un immense progrès.

Un mémoire du temps avait montré la nécessité d'une carte nouvelle : « En comparant différentes cartes modernes et estimées, on verra avec surprise qu'il y a telle ville déplacée de cinq, de dix, de quinze lieues et même davantage de sa véritable situation... » La partie astronomique du travail fut confiée à un Anglais, Nathaniel PIGOTT, auteur de ce mémoire. La position géographique de Namur, Luxembourg, Hoogstraeten, Ostende, Tournai fut déterminée par des observations des satellites de Jupiter.

La carte de Ferraris fut rééditée en 1832 par Philippe Van der Maelen. Membre de l'Académie en 1829, VAN DER MAELEN (1795-1869) avait publié en 1827 son *Atlas universel* en 400 feuilles à même échelle, et, en 1829, son *Atlas d'Europe*, en 165 feuilles. En 1830, il fonda l'Établissement géographique de Bruxelles, qui était à la fois un Institut cartographique, une école, une bibliothèque et un musée.

« Autour des ateliers qui composaient la partie fondamentale de l'Établissement, il réunit une bibliothèque géographique et une mappothèque uniques dans leur genre ; il fonda un musée minéralogique et géologique important, une collection de produits naturels et industriels de tous les pays, différentes collections d'objets de curiosité reflétant le caractère des sociétés diverses, un musée ethnographique, des médailles, des collections d'histoire naturelle, un jardin d'acclimatation, des serres magnifiques ; il eut des voyageurs naturalistes dans plusieurs parties du monde, entra en relations avec les professeurs les plus célèbres et

put faire des échanges avec les musées les plus renommés. Des cours publics et gratuits s'ouvrirent dans les vastes salles de l'Établissement. Tout le matériel nécessaire à des cours de physique et d'astronomie était à la disposition des auditeurs... Enfin, quand la belle expérience de Foucault vint permettre de montrer aux yeux le mouvement de rotation de la Terre, c'est à l'Établissement géographique que cette expérience fut répétée pour la première fois dans notre pays ». Toutes ces merveilles étaient réunies à Molenbeek-St-Jean, « hors et près de la porte de Flandre ».

Après la carte de Ferraris de 1832, en quarante-quatre feuilles, on vit sortir de l'Établissement géographique, de 1837 à 1852, la *Nouvelle carte topographique de la Belgique*, au 1/80 000 en vingt-cinq feuilles, d'après le levé cadastral, au 1/2500, dû au gouvernement des Pays-Bas. L'assemblage des plans cadastraux ne pouvait bien se faire qu'après une triangulation du pays. Le même gouvernement l'avait entreprise ; mais, assumée par un seul géodésien, le capitaine Erzey, elle n'était pas achevée en 1830. Van der Maelen eut recours, pour ce qui manquait, à une triangulation effectuée, à la même époque, dans le Hainaut et l'Entre-Sambre-et-Meuse par le colonel Van Gorcum, et aux prolongements, chez nous, des triangulations limitrophes.

Van der Maelen entreprit ensuite la reproduction des plans cadastraux eux-mêmes : quatre-vingt-quinze feuilles furent éditées à l'échelle du 1/5000, puis quarante-deux feuilles à l'échelle du 1/2500. A partir de 1846, huit années suffirent à la publication d'une carte de tout le pays, au 1/20 000, en deux cent cinquante feuilles. — Nous indiquerons encore les publications suivantes : l'Atlas des chemins vicinaux, au 1/10 000, à raison d'une feuille par commune (1841) ; les neuf cartes hypsométriques des provinces, au 1/100 000 (1851) ; les soixante-dix feuilles de l'atlas « représentant les sections, les travaux d'art et le matériel des chemins de fer de l'État » ; la carte géologique d'André Dumont, au 1/160 000 (1852) ; les *Dictionnaires géographiques des provinces* (1831-1838). A la mort du fils de Philippe Van der Maelen, en 1872, les collections ont été vendues et dispersées.

Le Dépôt de la guerre, créé en 1831, et qui devait devenir en 1878 l'Institut cartographique militaire, avait été institué pour l'exécution des cartes topographiques de l'armée, mais ce n'est qu'en 1859 que le parlement accorda les premiers crédits pour leur confection. La triangulation générale du pays et la publication des premières cartes furent faites sous la direction du chef de cet établissement à cette époque, le général Nerenburger.

Guillaume NERENBURGER (1804-1869), d'origine française, neveu par sa mère des héroïques sœurs de Fernig, naturalisé en 1846, prit une part importante aux opérations militaires des 18 premières années de l'Indépendance ; professeur à l'École militaire, il fut directeur du Dépôt de la Guerre de 1845 à 1863, et commanda l'École militaire de 1863 à 1869. C'est à lui qu'on doit tous les travaux préparatoires à la rédaction de la carte générale de la Belgique, y compris toutes les opérations géodésiques. En 1859 sortit la carte au 1/160 000. Les successeurs de Nerenburger publièrent la carte au 1/20 000, de 1866 à 1880, et la carte au 1/40 000 fut terminée en 1882. Ces cartes sont construites suivant la projection de Bonne (dite aussi projection de Flamsteed modifiée) : cette projection définit une carte équivalente, où les parallèles sont représentés par des circonférences concentriques. La description de ces opérations géodésiques et cartographiques se trouve dans l'ouvrage intitulé *Triangulation du royaume de Belgique*, publié par le Dépôt de la guerre, et dont le premier volume (1855) est dû au général Nerenburger.

III. LA TROISIÈME GÉNÉRATION

Sous ce titre vont être groupés les mathématiciens aujourd'hui disparus et dont les principaux travaux ont été publiés après 1880 : Gilbert, Folie, De Tilly, F. Deruyts, Carnoy, Massau,...

On s'est déjà rendu compte, par les pages qui précèdent, du développement de l'enseignement et des recherches mathématiques dans notre pays depuis le commencement de son indépendance. Ce développement n'a pas cessé de

s'accentuer. Dans telle université, où toutes les parties des mathématiques s'enseignaient, en 1850, du haut d'une seule chaire, cet enseignement est aujourd'hui distribué entre six professeurs. D'un autre côté, les publications périodiques dévolues aux sciences exactes se sont multipliées : la *Société royale des Sciences de Liége*, fondée en 1844, a inauguré la collection de ses *Mémoires* ; à la *Nouvelle correspondance mathématique* de Catalan a succédé *Mathesis*, publié par Neuberg et Mansion, puis par Neuberg et Ad. Mineur, professeur à l'Université de Bruxelles ; la *Société scientifique de Bruxelles*, fondée en 1875, avec sa première section consacrée aux mathématiques, édite dans ses *Annales* les travaux de ses membres ; *Ciel et Terre*, créé par le personnel scientifique de l'Observatoire, à l'initiative de l'astronome L. Niesten, paraît depuis 1880 : sous la direction d'Eugène Lagrange, professeur à l'École militaire, il a fusionné, en 1910, avec le *Bulletin* de la Société belge d'astronomie, fondée par F. Jacobs en 1894.

D'origine française, né à Beauraing en 1832, Philippe Gilbert succéda à Pagani, en 1855, dans l'enseignement des mathématiques à l'Université de Louvain. Nous devons à ce professorat d'excellents manuels : le *Cours d'analyse infinitésimale* (1872, 1878, 1887) et le *Cours de mécanique analytique* (1877, 1882, 1891). Associé de l'Académie en 1867, Gilbert publia ses premiers travaux dans les recueils de cette compagnie. Le grand ouvrage de ses débuts est ses *Recherches analytiques sur la diffraction de la lumière* (1861, 1863) qui devint « immédiatement classique et que Verdet fit passer tout entier dans ses *Leçons d'Optique physique*, en faisant ressortir, mieux que l'auteur lui-même, la supériorité de sa méthode, au point de vue de la rigueur et de la simplicité », sur celles de Fresnel et de Cauchy. Ce furent ensuite : son *Mémoire sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque* (1869) où il complète les découvertes de ses prédécesseurs sur plusieurs points importants ; ses *Recherches sur le développement de la fonction gamma*, « aussi importantes au fond, dit Catalan, que remarquables sous le rapport de l'élégance des transformations et de la variété des résultats ».

A partir de 1875, Gilbert confie la plupart de ses travaux

à la Société scientifique de Bruxelles, dont il était, avec le P. CARBONNELLE, le fondateur. Ce sont des articles très nombreux parmi lesquels il faut mettre hors de pair : une *Étude historique et critique sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* (1878) ; une étude sur *Les preuves mécaniques de la rotation de la Terre* (1883), qui parut dans la *Revue des Questions scientifiques*, périodique de haute vulgarisation, édité par la Société scientifique de Bruxelles depuis 1877, et surtout son *Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes du mouvement relatif* (1882 et 1883). Dans ce dernier travail il s'agit principalement des phénomènes qui se manifestent dans les systèmes matériels observés par rapport à la Terre, c'est-à-dire (la Terre tournant par rapport aux étoiles), dans un système d'axes auquel le principe de l'inertie n'est pas applicable. Ces phénomènes se manifestent de la manière la plus sensible dans les solides animés d'un mouvement de rotation rapide : les gyroscopes. « Ce mémoire, dit un rapport de Jordan, se recommande d'une manière particulière par sa clarté, par la simplicité inattendue des méthodes employées pour aborder des problèmes justement considérés comme difficiles, par le soin minutieux apporté au développement et à la discussion des solutions. La réunion de ces qualités fera lire avec intérêt la partie de ce mémoire consacrée à la théorie, si souvent traitée, du gyroscope de Foucault. Les géomètres y trouveront en outre des formules utiles et intéressantes sur les fonctions elliptiques. Toutefois la partie la plus neuve et la plus originale du mémoire nous paraît être celle qui se rapporte à des systèmes moins connus, tels que le tore-pendule et le barogyroscope, où la pesanteur intervient dans les phénomènes. Le dernier de ces appareils, dont la conception et la théorie appartiennent en entier à l'auteur, mérite assurément de devenir classique. » Le barogyroscope de Gilbert est devenu classique, en effet, et les traités de mécanique ne manquent pas d'en parler. C'est un tore susceptible de prendre un mouvement de rotation autour d'un axe qui peut décrire un plan vertical, le centre de gravité du système mobile se trouvant en dehors de l'horizontale autour de laquelle ce système peut osciller : c'est un pendule gyroscopique. Dans la rotation rapide du tore, l'axe de celui-ci

s'écarte de la verticale, de manière à diminuer l'angle qu'il fait avec l'axe terrestre. Toutes autres choses égales, cet angle devient minimum lorsque le plan que peut décrire l'axe du tore est le méridien du lieu.

Gilbert s'est aussi fait historien des sciences dans la publication de plusieurs biographies et dans « l'étude la plus approfondie qui existe sur le procès de Galilée ». L'Université de Louvain perdit ce maître en 1892.

En 1867, elle avait fait appel à un autre géomètre, Joseph Carnoy (1841-1906). Cet excellent professeur publia, en plusieurs éditions, des manuels universitaires qui devaient connaître le plus grand succès : un *Cours d'algèbre supérieure* et un *Cours de géométrie analytique ;* géométrie plane et géométrie dans l'espace. Le cours d'algèbre reste précieux par le traité d'invariantologie qu'il renferme. Le cours de géométrie a été l'un des premiers à rendre familier aux débutants l'usage des coordonnées tangentielles, triangulaires et tétraédriques ; on y trouve quelques belles propositions originales dont les applications permettent, plus rapidement que les théorèmes de Pascal et de Brianchon, la construction d'une conique définie par cinq points ou par cinq tangentes.

Par son cours de *Méthodologie mathématique* (1883-1896), F. Dauge (1829-1899), professeur à l'Université de Gand, a eu la plus grande influence sur l'enseignement des mathématiques en Belgique, au degré moyen. Grâce à lui, bien des questions, traitées souvent d'une façon peu satisfaisante, ne l'ont plus été désormais que d'une manière rigoureuse : il en a été principalement ainsi dans des questions d'algèbre et de géométrie analytique.

Le successeur de Houzeau dans la direction de l'Observatoire fut François Folie. Né à Venloo en 1833, d'une famille hennuyère, Folie fut nommé, en 1867, administrateur-inspecteur de l'Université de Liége, qui lui doit l'Observatoire de Cointe (1882) (1). Directeur de l'Obser-

(1) Un petit observatoire privé eut, à Louvain, son époque d'utilité : son propriétaire, François Terby (1846-1911), y fit, pendant trente ans, un grand nombre d'observations planétaires ; il a particulièrement étudié les canaux de Mars, la surface de Jupiter, les satellites de Saturne.

vatoire royal en 1885, il eut à poursuivre la réédification de cet établissement sur le plateau d'Uccle, et à pourvoir à sa réorganisation. Par ses premiers travaux, il avait cultivé la mécanique rationnelle dans sa *Théorie nouvelle du mouvement d'un corps solide* (1865, 1867), et la géométrie dans sa *Géométrie supérieure cartésienne* (1872) et dans sa *Théorie des faisceaux* (1878) ; mais, bientôt orienté vers l'astronomie, il consacra à la mécanique céleste la plus grande partie de sa vie scientifique. Ses études se portèrent principalement sur la rotation de la terre et sur les déplacements périodiques de l'axe de notre planète : sa *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde* parut en 1884. C'est là que Folie défendit l'existence de la nutation diurne, dont il retrouvait la répercussion dans les variations des coordonnées stellaires. Il soutint sa thèse dans une foule de publications, parmi lesquelles il faut citer la *Détermination provisoire des constantes de la nutation diurne et de la nutation initiale* (1890). Les travaux théoriques de Folie avaient-ils une trop grande avance sur les possibilités de l'observation de son époque, et peut-on voir dans des recherches récentes sur la variation des latitudes un commencement de confirmation de ses idées ? Quoi qu'il en soit, ses théories et ses conclusions furent combattues par les contemporains. Mais il n'abandonna pas la partie et, ayant quitté l'Observatoire en 1897, il lutta jusqu'à sa mort, en 1905.

Nous savons que Folie a publié les *Principes de Calcul* de Brasseur. On lui doit la publication d'un autre ouvrage posthume : le *Cours de calcul de probabilités* (1874) que fit A. Meyer à l'Université de Liége, de 1849 à 1857. Meyer (1803-1857), originaire du Luxembourg germanique, a publié de nombreux mémoires, notes et ouvrages didactiques ; son *Calcul des probabilités* a une valeur durable.

Joseph Graindorge (1843-1896) fut professeur à l'Université de Liége, où il a publié son *Cours de Mécanique*. Il est surtout connu comme auteur (avec V. Falisse, professeur agrégé de l'Université de Liége) d'un *Traité d'algèbre élémentaire*, dont la vogue dura quarante ans. (Le cours de Géométrie analytique plane de Falisse a connu le même succès). Mais les travaux les plus méritoires de

Graindorge sont ceux par lesquels il a répandu les nouvelles méthodes de la mécanique analytique : *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles* (1871, 1890). En analyse, il faut citer : *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres* (1872).

A peine sorti de l'École militaire, à l'âge de vingt et un ans (il était né à Ypres en 1837), Joseph-Marie De Tilly s'appliqua à l'étude approfondie des principes de la géométrie. Ses *Recherches sur les éléments de Géométrie* parurent en 1860 : il y suit pas à pas les éléments de Legendre, dont il dénonce les insuffisances et résout les principales difficultés ; le quart du livre est consacré à la théorie des parallèles ; son essai de démonstration du postulatum d'Euclide « est tellement subtil qu'on ne peut guère en trouver le défaut que si on connaît la géométrie lobatchefskienne » (Mansion). Après sa nomination de répétiteur à l'École militaire, la rédaction de son *Cours de Mécanique élémentaire* (1866) et celle de son *Cours d'artillerie* ne l'empêchèrent pas de poursuivre ses travaux de mathématiques pures ; en 1868, il présenta ses *Études de mécanique abstraite :* c'est un ouvrage fondamental de mécanique non euclidienne.

Correspondant de l'Académie en 1870, membre en 1878, De Tilly publia, dans les recueils de ce corps savant et dans les *Annales* de la Société scientifique de Bruxelles, de nombreux articles relatifs à l'art militaire, à la géométrie non euclidienne, à la mécanique rationnelle. Dans le premier de ces domaines, on ne peut qu'indiquer des mémoires sur la balistique (de 1873 à 1883) et, en particulier, signaler la part importante que prend dans la *Balistique extérieure* (1874) la théorie des erreurs et son application au tir des projectiles. Mais il faut s'arrêter à l'*Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique* (1878). « Reprenant, à son insu, une idée émise par Cauchy, il fonde toute la géométrie sur la notion d'intervalle ou de distance de deux points, et les propriétés des points de l'espace sont des relations entre les intervalles : la géométrie est la physique mathématique des distances. » La géométrie abstraite repose sur ce seul axiome : la distance entre deux points varie en commençant par croître. Dans

cette géométrie abstraite, la géométrie euclidienne est celle qui adopte de plus les deux axiomes suivants : celui d'une distance infiniment croissante, et celui de la parallèle unique. « Le succès de l'Essai fut complet dans le monde savant, et le livre de De Tilly devint, en quelques années, introuvable. » Les idées sur les principes de la mécanique qui y étaient défendues ont été reprises et développées dans le mémoire *Sur les notions de force, d'accélération et d'énergie* (1887).

Devenu commandant et directeur des études à l'École militaire en 1889, De Tilly écrivit un *Essai de Géométrie analytique générale* (1892). Voici l'idée fondamentale de ce mémoire : il existe une relation entre les dix distances de cinq points ; elle n'est pas la même dans les divers systèmes de géométrie ; d'où une relation valable pour la géométrie euclidienne (J. Lagrange, 1773, et L. Cayley, 1841), et une relation valable pour chacune des deux géométries non-euclidiennes (Schering, 1870 et 1873). C'est de ces relations que l'Essai de 1892 fait sortir la géométrie tout entière. Mis à la retraite en 1900 (1), le général De Tilly mourut en 1906. Son successeur dans le commandement de l'École militaire fut le général G. Leman, qui devait s'illustrer, en 1914, dans la défense de Liége.

François Deruyts (1864-1902), professeur à l'Université de Liége, s'est surtout occupé de géométrie supérieure. « Son travail le plus étendu est son *Mémoire sur la Théorie de l'involution et de l'homographie unicursale* (1890) qu'il a complété dans des mémoires ultérieurs où il s'occupe des groupes neutres des involutions par des méthodes très simples. »

Junius Massau (1852-1909) enseigna la mécanique à l'Université de Gand. Il donna au calcul graphique une extension considérable en créant l'intégration graphique : *Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications* (1877, 1886, 1889), y compris l'intégration approchée des équations différentielles et aux dérivées partielles. C'est lui aussi qui assouplit extrêmement la nomographie en y introduisant l'anamorphose sous sa forme la plus générale.

(1) Sur les circonstances dans lesquelles cette mesure a été prise, voir la notice de P. Mansion sur le général De Tilly (Ann. Acad ,1914).

IV. Les contemporains

Dans cette dernière partie, nous grouperons les mathématiciens en vie en 1914 et disparus aujourd'hui.

Jean-Baptiste Beaupain (1857-1916), ingénieur au Corps des mines, a publié plusieurs mémoires sur les fonctions eulériennes et les fonctions de Riemann, et un mémoire qu'il y a lieu de citer, *Sur une classe de fonctions qui se rattachent aux fonctions de Jacques Bernoulli* (1900).

Paul Mansion, né à Marchin-lez-Huy, en 1844, correspondant de l'Académie en 1882 et membre en 1887, secrétaire général de la Société scientifique de Bruxelles jusqu'à sa mort en 1919, fut professeur à l'Université de Gand de 1867 à 1910. Après un mémoire intitulé *Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques* (1870), son premier grand ouvrage fut une *Théorie des équations aux dérivées partielles* (1875), immédiatement suivie de plusieurs notes sur la même question ou des questions connexes. Il s'appliqua ensuite à la théorie de l'élimination entre deux équations algébriques et fit une étude approfondie des quadratures approchées.

En 1892, Mansion succéda à Boudin (1) dans la chaire de calcul des probabilités. Il a apporté des contributions importantes à cette partie des mathématiques, parmi lesquelles il faut citer une étude sur le célèbre théorème de Bernoulli (1902). Il revint ensuite aux fonctions elliptiques : *Sur la méthode d'Abel pour l'inversion de la première intégrale elliptique, dans le cas où le module a une valeur imaginaire complexe* (1903). Chargé, à partir de 1884, du cours d'histoire des sciences mathématiques et physiques, Mansion apporta à l'histoire de ces sciences de nombreuses contributions. L'astronomie ancienne et la question de Galilée l'ont particulièrement intéressé. Il a cultivé aussi

Cet incident, qui eut sa répercussion à la Chambre, où il se termina par un vote unanime qui était un hommage éclatant rendu à De Tilly, appartient à l'histoire des mathématiques en Belgique, dans la mesure où il est lié aux discussions (auxquelles il a déjà été fait allusion) sur la notion d'infiniment petit et la nature de la différentielle.

(1) E.-J. Boudin (1820-1893) a été professeur à l'Université de Gand de 1846 à 1892. Dans sa plus grande partie, son enseignement

les principes de la géométrie et a publié plus de cinquante notes et mémoires sur la métagéométrie, par quoi il faut entendre la géométrie en ce qu'elle a de commun à la géométrie euclidienne et aux géométries non euclidiennes et de logiquement antérieur à ces trois géométries. Nous savons déjà que Mansion a fondé avec Catalan la *Nouvelle Correspondance mathématique* et qu'il est, avec Neuberg, le fondateur de *Mathesis*. Signalons aussi son activité à l'Académie et à la Société scientifique, sa participation à de nombreuses commissions officielles, et la formation de nombreux disciples, pour faire comprendre combien a été profonde, pendant quarante ans, l'influence de Mansion sur l'enseignement et le développement des mathématiques dans notre pays.

Jean-Baptiste NEUBERG (1840-1926), né à Luxembourg et naturalisé Belge, a enseigné les mathématiques dans divers athénées, puis, à partir de 1880, l'analyse à l'Université de Liége ; il y a succédé à Catalan. Correspondant de l'Académie en 1891, membre en 1897, il fut admis à l'éméritat en 1911. Il s'appliqua surtout à la géométrie du triangle et du tétraèdre « dont il fut, avec Lemoine et Brocard, le créateur », et qu'il étudia « dans leurs rapports avec les coniques, les quadriques, les cubiques planes ou gauches, et les complexes ». Une *Étude sur les coordonnées tétraédriques* (1870), un *Mémoire sur le tétraèdre* (1884) se trouvent parmi les principaux de ses ouvrages.

Ernest PASQUIER, né à Fleurus en 1849, a été professeur à l'Université de Louvain depuis 1873 jusqu'à l'année qui devait précéder sa mort, en 1926. Ses travaux les plus importants concernent les principes de la mécanique, l'astronomie et diverses questions de mécanique céleste. Les écrits sur les principes de la mécanique ont paru de 1895 à 1901, par les soins de la Société scientifique de

fut celui de branches techniques (hydraulique, stabilité des constructions). Il ne publia son cours de calcul des probabilités que par la voie de l'autographie (1865, 1886, 1889). Ce fut Mansion qui en donna une édition définitive après y avoir fait des additions étendues : *Leçons de Calcul des probabilités* (1916). Mansion y a introduit un discours qu'il a prononcé, en 1903, devant la Classe des sciences de l'Académie, *Sur la portée objective du calcul des probabilités.*

Bruxelles, qui avait décidé de mettre cette question, d'une manière permanente, à l'ordre du jour des réunions de sa section mathématique : c'est aux idées très nettes que Pasquier s'était faites sur cet objet que son *Cours de Mécanique analytique* (1897, 1901) doit les meilleures de ses qualités ; c'est là que la variabilité de la masse a été envisagée pour la première fois, et les élèves de Pasquier se sont trouvés tout préparés à la réforme relativiste. En astronomie, il s'est agi principalement des trajectoires planétaires, et Pasquier a donné, en 1886, une traduction française du grand ouvrage d'Oppolzer : *Traité de la détermination des orbites des planètes et des comètes*. En mécanique céleste, il faut citer un important mémoire de 1911 *sur les variations de la latitude et les déviations de la verticale*.

Joseph Fairon (1863-1925), professeur à l'Université de Liége, a repris l'enseignement et poursuivi les travaux de Fr. Deruyts en géométrie supérieure. Parmi ses nombreuses recherches, il convient de signaler celles dans lesquelles « il représente sur des courbes rationnelles planes ou gauches des systèmes de formes algébriques des quatre premiers degrés ».

Constantin Le Paige est né à Liége en 1852. Professeur à l'Université de cette ville, correspondant de l'Académie en 1885, membre en 1890, professeur émérite en 1923, il termina sa carrière en 1928. Il apporta d'importantes contributions à la théorie des déterminants et à celle de l'élimination ; il approfondit la théorie des formes algébriques et poursuivit l'application de cette théorie à l'étude des figures : les cubiques, les quartiques, le pentaèdre, les configurations. On lui doit une forme définitive de la géométrie du troisième ordre, dans laquelle il réalise la construction linéaire de la surface la plus générale de cet ordre. Dans de savantes notices sur Sluse, sur Wendelin et sur les mathématiciens de l'ancien pays de Liége, C. Le Paige s'est fait historien. Dans ce domaine, il s'est trouvé l'émule du P. Bosmans (1852-1928), qui s'était spécialisé dans les recherches relatives à la vie et aux écrits des mathématiciens du XVI^e^ siècle, Michel Coignet, Gemma Frisius, Albert Girard, Adrien Romain, Simon Stevin, et du XVII^e^ siècle, Grégoire de Saint-Vincent, André Taquet, les jésuites

missionnaires en Chine. Un autre historien des mathématiques fut le P. THIRION (1852-1918) : outre un grand nombre d'articles, il écrivit un excellent ouvrage sur *L'évolution de l'Astronomie chez les Grecs* (1900).

Édouard GOEDSEELS, né à Louvain en 1857, fut professeur à l'École de guerre et à l'École militaire de 1890 à 1898, administrateur-inspecteur de l'Observatoire de 1899 à 1922, professeur à l'Université de Louvain de 1901 à 1914, et mourut en 1928. De même qu'une excellente et originale *Théorie des instruments visuels* le fera dans l'histoire de l'astronomie, ses contributions au calcul des probabilités et à la théorie des erreurs garderont son nom dans l'histoire des mathématiques. Après la publication de notes nombreuses, il a donné aux idées très personnelles qu'il avait sur ce sujet, une forme didactique dans les éditions successives et profondément différentes de sa *Théorie des erreurs d'observation* (1902, 1909, 1912) ; attachant à la notion, généralement négligée, d'approximation toute l'importance qu'elle mérite, il a mis sur pied la méthode la plus approximative et la méthode de l'approximation minimum ; introduisant, d'une manière systématique, la même notion dans le calcul des probabilités, il établit quelles sont les circonstances qui rendent légitime la méthode des moindres carrés. Il a transformé la méthode empirique de Tobie Mayer, et, définissant la fonction à laquelle il donna le nom d'approximation quadratique, il a rendu indépendante du concept de probabilité la méthode des moindres carrés, qui devient ainsi la méthode quadratiquement la plus approximative.

Administrateur-inspecteur de l'Observatoire, Goedseels nous ramène à cet établissement. Ces fonctions y furent créées au lendemain du départ de Folie, dans la réorganisation de 1898. Celle-ci sépara les services scientifiques : service astronomique et service météorologique. Ch. LAGRANGE, professeur à l'École militaire, fut mis à la tête du premier, et A. LANCASTER à la tête du second. En 1900, la succession de Ch. Lagrange fut prise par G. LECOINTE, officier d'artillerie, auteur d'un traité de *Navigation estimée et navigation astronomique* (1897) et qui avait commandé

en second l'expédition antarctique du *Belgica* (1898). Aujourd'hui, depuis une nouvelle réorganisation, en 1913, la séparation des services a abouti à la création de deux établissements distincts : l'Observatoire royal et l'Institut royal météorologique.

Nous avons terminé le tableau des travaux mathématiques et astronomiques dus, chez nous, aux hommes de science dont la carrière est accomplie. A partir d'une époque extrêmement pauvre, nous avons assisté à un développement considérable de l'activité scientifique dans le domaine des sciences exactes. Ceux qui sont encore à la tâche entretiennent efficacement ce développement. Il n'est pas dans notre programme d'en parler davantage, mais il est difficile de ne pas citer quelques noms de premier plan, et les principales recherches par lesquelles ils se sont fait connaître. Nous nous limiterons aux mathématiciens dont l'Académie a, par leur élection, consacré les travaux.

M. Charles de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain, premier président et président d'honneur de l'Union mathématique internationale : nombres premiers et polynomes d'approximation. — M. Alphonse Demoulin, professeur à l'Université de Gand : géométrie anallagmatique intrinsèque. — M. Giuseppe Cesaro, professeur émérite de l'Université de Liége : cristallographie mathématique. — M. Charles Lagrange, professeur émérite de l'École militaire : mécanique céleste. — M. Clément Servais, professeur à l'Université de Gand : géométrie synthétique, géométrie du tétraèdre. — M. Jacques Deruyts, professeur à l'université de Liége : formes algébriques. — M. Modeste Stuyvaert, professeur à l'université de Gand : cubiques, quartiques, surfaces algébriques. — M. Théophile De Donder, professeur à l'université de Bruxelles : invariants intégraux, relativité. — M. Adolphe Mineur, professeur à l'université de Bruxelles : géométrie supérieure. — M. Lucien Godeaux, professeur à l'université de Liége : géométrie algébrique. — L'astronomie est représentée principalement par M. Paul Stroobant, directeur de l'Observatoire royal et professeur à l'université de Bruxelles, et la géodésie par M. Marcel Dehalu, professeur à l'université de Liége.

Les savants belges de la période contemporaine ont contribué au progrès de toutes les parties des mathé-

matiques. Il serait facile de s'en souvenir dans l'enseignement, souvent dès la théorie, plus souvent dans le choix des applications et des exercices. Les Italiens disent volontiers *Il nostro...* et les Allemands *Unser...* ; nous pourrions bien dire de temps en temps : *Notre compatriote...*

La planète transneptunienne

par M. M. Alliaume (1)

(Suite)

VI. – *LA PRÉDICTION DE TRANSNEPTUNIENNES PAR LES PERTURBATIONS D'URANUS.*

Une lettre reçue par Airy en 1834 raconte une conversation de son auteur et de Bouvard : il s'agit des perturbations inexpliquées d'Uranus et du corps céleste qui en serait responsable. On y trouve une opinion que Hansen aurait exprimée à Bouvard : qu'une planète ne suffirait pas à rendre compte des phénomènes et qu'il devait y avoir deux transuraniennes. Lors de la publication de cette lettre, au lendemain du succès de Le Verrier, Hansen a protesté : il n'a rien affirmé, il y avait un *peut-être* dans sa proposition. Protesterait-il encore aujourd'hui ?

C'est dès la publication des éléments de Neptune d'après l'observation, en 1848, que Babinet exprima et défendit avec une énergie extrême la même opinion : la planète Neptune n'aurait pas été responsable seule des perturbations d'Uranus, et sa découverte dans la direction indiquée par Le Verrier n'était due qu'à un hasard heureux. Aussi fut-ce une jolie bataille !

Babinet attaque rudement : « L'identité de la planète Nep» tune, dit-il à l'Académie, avec la planète théorique, qui rend » compte si admirablement des perturbations d'Uranus, d'après » les travaux de MM. Le Verrier et Adams, mais surtout » d'après ceux de l'astronome français, n'étant plus admise par » personne depuis les énormes différences constatées entre » l'astre réel et l'astre théorique quant à la masse, à la durée » de révolution, à la distance au Soleil, à l'excentricité, et même » à la longitude (excepté pour l'époque de la découverte de » M. Galle..., ou très peu d'années avant et après), on est con» duit à chercher si les perturbations d'Uranus se prêteraient à » l'indication d'un second corps planétaire voisin de Neptune » ou à une distance considérable de cette planète, en rapport » avec la loi de Bode ou avec toute autre loi empirique ; l'action

(1) Ciel et Terre, t. 46 (1930), pp. 188-210.

» de cette planète, combinée avec celle de Neptune, devrait pro-
» duire les perturbations observées. » Il faudrait attendre un demi-siècle avant que les perturbations de Neptune et d'Uranus par cette planète pussent manifester son existence; et l'auteur se contente de considérer les effets de la planète théorique de Le Verrier comme la résultante des actions de Neptune et d'une autre planète, qu'il appelle Hypérion. C'est à peu près le texte de Babinet; mais il est clair que les deux méthodes, essentiellement, n'en font qu'une. Il n'y a de différence que dans la manière d'introduire les approximations, et le dispositif proposé paraît d'ailleurs peu légitime. Encore est-il appliqué d'une manière assez lâche : ce sont des estimations, plutôt que des calculs, au bout desquelles ont trouve, pour Hypérion,

demi-grand axe	48
durée de révolution	336 ans

et une longitude héliocentrique égale à 325°,5 au début de 1847, ce qui place la planète, à cette époque, sur l'écliptique, aux confins des constellations du Verseau et du Capricorne; et c'est au voisinage des Pléiades qu'il faudrait actuellement la chercher.

L'histoire d'Hypérion est bien oubliée aujourd'hui, et il ne semble même pas qu'on se la soit rappelée lorsqu'on a attribué ce même nom au huitième satellite de Saturne; mais c'est, à cette pointe un peu inconsidérée de Babinet que nous devons, en riposte, un beau mémoire de Le Verrier. Ce qu'il défend, c'est l'identité de Neptune et de la planète dont il a calculé les éléments. Quant à l'idée d'une autre planète encore, transneptunienne, elle ne répugnait pas à sa conception du système solaire. Voici ce qu'il disait, dès le 5 octobre 1846, en annonçant à l'Académie la découverte de la planète : ce succès doit nous laisser espérer qu'après trente ou quarante années d'observations de la nouvelle planète, on pourra l'employer à son tour à la découverte de celle qui la suit, dans l'ordre des distances au Soleil. En 1866, les tables de Neptune, calculées par Newcomb, furent publiées par la Smithsonian Institution. L'auteur recherche si les perturbations de Neptune décèlent l'existence de quelque planète transneptunienne; il conclut à l'impossibilité de résoudre ce problème avant la fin du XIX^{e} siècle.

Cette échéance est franchie depuis longtemps, et il ne semble

pas que les perturbations de Neptune puissent servir, même aujourd'hui, à la recherche d'une transneptunienne. La plus lointaine des planètes connues a, en effet, une révolution de 185 ans, et on n'a pas encore pu, depuis sa découverte, l'observer sur la moitié de son orbite. Aussi verrons-nous qu'un seul astronome, jusqu'ici, s'est appuyé sur les perturbations de Neptune dans la recherche d'une planète plus lointaine, et n'aurons-nous plus guère à nous occuper de ces perturbations. Rappelons cependant l'opinion exprimée à ce sujet par C. Flammarion, dans son *Astronomie populaire*, en 1880: « Nous pouvons même ne pas désespérer de trouver prochainement la première [des planètes transneptuniennes], lorsque les observations de Neptune s'étendront sur un espace assez grand pour que, son orbite étant rigoureusement calculée, les perturbations exercées par la planète extérieure se manifestent d'une manière sensible. Cette recherche pourra être entreprise au siècle prochain ». Et rapprochons cet avis de celui de P. Tisserand, paru dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes* pour 1885: « Il ne serait peut-être pas impossible qu'une planète circulant autour du Soleil à une distance double de celle de Neptune, ayant une masse comparable à celle de cette planète, n'ait pu produire encore sur elle des effets sensibles; son action aurait pu se confondre dans une certaine mesure avec les effets produits par les autres planètes, de manière à ne pas s'accuser actuellement; ainsi, de 1807 à 1820, l'effet perturbateur de Neptune sur Uranus est resté sensiblement constant; et il aurait été possible, durant cet intervalle, de représenter avec une grande rigueur les mouvements d'Uranus, sans avoir recours à l'action d'une planète inconnue. Si tant est qu'on puisse se servir un jour de Neptune, comme on l'a fait d'Uranus, pour reculer les bornes de notre système planétaire, il faudra donc sans doute attendre longtemps encore, à moins d'un hasard heureux, analogue à celui qui a présidé à la découverte d'Uranus; mais il faut convenir que les chances sont beaucoup moins favorables....»

En 1873, la Smithsonian Institution publia les tables d'Uranus, dues aussi à Newcomb: *Investigation on the Orbit of Uranus*. Les discordances entre les positions calculées et les positions observées furent considérées comme insignifiantes. Mais c'est à partir de 1875, précisément, que ces discordances de-

vaient devenir difficilement acceptables. C'est ce dont nous allons nous rendre compte.

La théorie complète d'Uranus, eu égard à l'existence de Neptune, fut insérée par Le Verrier dans les *Annales de l'Observatoire de Paris,* t. 14, en 1874. Ce travail était en harmonie avec celui de Newcomb, et c'est à ses tables de prédiction que nous allons comparer les observations d'Uranus.

Dans sa partie supérieure, la figure 4 est le diagramme par points des discordances entre la théorie d'Uranus, d'après Le Verrier, et l'observation de cette planète, de 1780 à 1910. Le temps est porté en abscisses, d'année en année, et les ordonnées sont les excès des longitudes héliocentriques observées sur les longitudes héliocentriques calculées: le centre de chaque petit cercle définit la valeur moyenne de cette différence pour toutes les observations de l'année correspondante. Il sera utile de rapprocher ce diagramme de ceux des deux figures précédentes, dessinées dans l'ignorance de Neptune, pour juger de l'amélioration réalisée: cette comparaison exige deux remarques.

Dans les diagrammes précédents les abscisses étaient proportionnelles, non pas au temps, mais à la longitude héliocentrique observée. Si l'orbite était circulaire, la longitude héliocentrique vraie serait proportionnelle au temps. Avec son excentricité égale à 0, 046, l'orbite d'Uranus est assez peu aplatie pour que les échelles des abscisses des diagrammes précédents et du diagramme actuel puissent, pratiquement, être rapprochées sans transformation.

Quant aux ordonnées, il importe d'attirer l'attention sur la différence énorme qui existe entre les échelles adoptées; un même nombre de secondes est représenté sur le diagramme nouveau par une ordonnée environ trente fois plus grande que sur le diagramme ancien; on se servira de ceci pour se figurer où se trouverait, sur le diagramme d'aujourd'hui, la discordance de 128" représentée sur la figure 2 pour les observations de 1840.

Le diagramme des erreurs en longitude de la théorie de Le Verrier revèle-t-il une allure générale assez régulière pour qu'on puisse invoquer quelque cause systématique? Il semble bien que trois périodes doivent être distinguées : de 1780 à 1830, de 1830 à 1880 et de 1880 à 1910.

Dans la première période, on aperçoit des points distribués de — 6" à + 4" d'une manière où quelque régularité est difficile

à discerner: on aperçoit bien, moyennement, une déficience de 1780 à 1792, un excès de 1793 à 1815, une déficience de 1815 à 1830. Mais c'est très vague; le plus prudent est sans doute de n'y reconnaître aucune influence systématique, et de ne parler que d'erreurs accidentelles dans des observations médiocres. On répondra que les nombres mis en diagramme ne sont pas relatifs à des observations considérées séparément, mais aux moyennes des observations de chaque année. Cette remarque ne pourra que

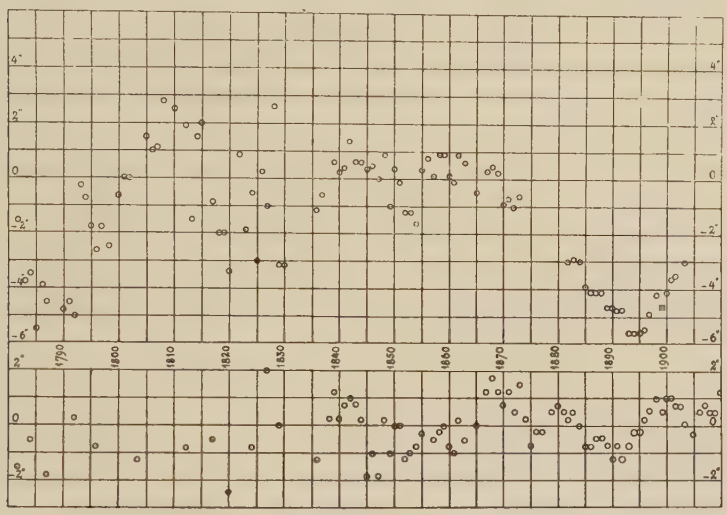


Fig. 4. — Perturbations d'Uranus de 1780 à 1910, eu égard à l'action de Neptune: excès moyen, pour chaque année d'observations, de la longitude héliocentrique observée sur la longitude héliocentrique calculée. Diagramme supérieur, longitudes calculées par la théorie de Le Verrier (1874); diagramme inférieur, longitudes calculées par la théorie de Gaillot (1910).

nous rendre plus perplexes. La moyenne d'une série de nombres ne remplace pas cette série: elle ne peut être utile que si on y joint une grandeur qui exprime la dispersion des nombres de la série, comme la différence entre la moyenne et le nombre primitif qui s'en écarte le plus; on sait même combien l'erreur probable est une notion dangereuse.

De 1830 à 1880, tous les points du diagramme se pressent étroitement contre la ligne des erreurs nulles; aucune divergence n'atteint 2": que l'on se représente de quelle manière admirable les points correspondants s'aligneraient le long de cet

axe à l'échelle des diagrammes précédents. Nous n'apercevons ici que des erreurs accidentelles dans de bonnes observations.

En 1880, il y a effondrement: une action dont l'origine est inconnue se manifeste. Le point le plus bas est atteint en 1894, par un excès de près de 6" de la longitude héliocentrique calculée sur la longitude héliocentrique observée. Après quoi le défaut de la table diminue régulièrement. Ici, l'échappatoire des erreurs accidentelles deviendrait abusif: il va falloir chercher la cause du phénomène.

Ce diagramme, comme celui de la partie inférieure de la même figure, a été dessiné d'après une planche du mémoire de P. Lowell auquel fait allusion la dépêche de M. Shapley, et dont nous allons parler longuement. A la vérité, Lowell a été plus audacieux: il a complété le diagramme par une ligne qui le parcourt entièrement, aussi bien dans les périodes où nous n'avons aperçu aucune régularité, que dans la période récente. Une fois tracée, cette courbe peut paraître mériter quelque confiance: c'est en refaisant le diagramme que nous avons vu qu'elle serait aussi bien tracée tout autrement.

Cependant, dès 1880, D. P. Todd a cru pouvoir entreprendre la recherche d'une planète responsable de ces petites discordances, si peu régulières que celles-ci se fussent montrées jusqu'à cette époque: c'est ce que nous apprend un *Preliminary Account of a speculative and practical Search for a Trans-neptunian Planet*, publié dans *The American Journal of Science*, 2e volume de 1880. « Bien que les admirables travaux de Leverrier et Adams soient, dit l'auteur, des chefs-d'œuvre d'habileté analytique, j'ai pensé qu'ils ne devaient pas être pris pour modèles ici, et cela pour deux raisons:

1. Les discordances en longitude ne sont pas assez marquées pour justifier une recherche aussi laborieuse;

2. Même dans le cas d'Uranus avant la découverte de Neptune, et si nettes qu'aient été les discordances en longitude, plusieurs éléments de la planète perturbatrice ne purent être calculés que moyennant une précision bien mince ».

A partir de quoi, Todd devient extrêmement réservé. Il invoque ce qu'il appelle la méthode de J. Herschel. Voici de quoi il s'agit : J. Herschel, dans ses *Outlines of Astronomy*, raconte la découverte de Neptune en un langage dépourvu d'appareil algébrique, et qui peut constituer, dans une certaine mesure, un

guide pour la solution grossièrement approchée de pareil problème.

Commençons par admettre que la planète troublée P et la planète perturbatrice P' aient des orbites circulaires dans un même plan; si le rapport des rayons a et a' était connu, il en serait de même des durées de révolution T et T' en vertu de la loi collective du système planétaire: à la connaissance du rayon moyen en rayons moyens de l'orbite terrestre correspond, en années, celle de la durée de révolution. A un instant quelconque t, compté depuis une conjonction, les longitudes héliocentriques des planètes ont augmenté d'angles

$$\frac{360^\circ . t}{T} \text{ et } \frac{360^\circ . t}{T'}$$

On connaît ainsi leurs positions à cet instant, d'où leur distance, d'où une quantité proportionnelle à leurs attractions mutuelles. L'attraction de P' sur P est décomposée en une composante normale et une composante tangentielle. Au bout d'un petit intervalle de temps, la composante tangentielle fait varier la vitesse et par conséquent la position d'une quantité petite du même ordre, tandis que la composante normale fait varier le rayon d'une quantité petite du deuxième ordre, tenue pour négligeable. On prévoit la suite, et comment ceci permettrait la création d'une méthode, non pas exacte, certes, mais de l'approximation de laquelle on pourrait se rendre compte.

Il ne semble même pas que Todd ait poussé les choses aussi loin. Peut-être n'a-t-il fait que raisonner de la manière suivante, dont il pouvait constater l'efficacité, après coup, par la découverte de Neptune. A la plus grande perturbation inexpliquée d'Uranus correspond la conjonction des deux astres : pareille perturbation maximum s'est faite entre 1780 et 1795; il semble qu'une autre doive se produire vers la fin du siècle; d'où, pour l'astre inconnu, une révolution de 375 ans, à quoi correspond une distance héliocentrique de 52 rayons de l'orbite terrestre et, fin 1877, une longitude de 170°.

Nous avons renversé le raisonnement du texte, où l'hypothèse porte sur la distance plutôt que sur la deuxième perturbation, mais la logique l'exige. Nous aurons à comparer ce résultat avec ceux de recherches plus savantes; notons tout de suite qu'il y a, à l'actif du premier, la perturbation maximum de la fin du siè-

cle, qui s'est produite vers 1890, et sur l'existence de laquelle nous venons de le faire reposer.

Pourquoi l'auteur, ensuite, attribue 103° à la longitude du nœud correspondant, et 1°24' à l'obliquité du plan de l'orbite sur celui de l'écliptique, il est extrêmement probable que nous ne le saurons jamais.

Vers 1900, les tables de Le Verrier pour les mouvements d'Uranus et de Neptune avaient cessé d'être exactes. Les années écoulées depuis ce premier travail, un peu hâtif, avaient allongé

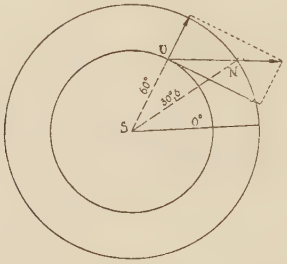


Fig. 5. — Orbites d'Uranus (U) et de Neptune (N). Le rayon marqué 0° est celui suivant lequel s'est faite la conjonction des deux planètes. Les nombres 60° et 30°.6 mesurent les angles des rayons héliocentriques des deux planètes, à partir de celui de leur conjonction. Le vecteur UN représente l'attraction d'Uranus par Neptune. Sa projection sur la tangente à l'orbite d'Uranus est le terme principal de l'influence perturbatrice de Neptune sur l'orbite d'Uranus. A la même échelle des forces, l'attraction mutuelle des deux planètes à l'instant de la conjonction serait représentée par un vecteur 2,3 fois plus grand que le vecteur UN (la composante tangentielle étant alors nulle), et l'attraction d'Uranus par le Soleil le serait par un vecteur 13800 fois plus grand.

considérablement le tableau des résultats d'observation: à partir de données numériques ainsi multipliées, la Théorie des erreurs allait pouvoir s'appliquer avec une efficacité bien plus grande. Aussi y avait-il lieu de les calculer à nouveau, en particulier au moyen de meilleures valeurs des masses. C'est ce que firent, séparément, H. E. Lau et A. Gaillot.

Nous ne savons pas si les tables de Lau ont été publiées, mais le *Bulletin astronomique* de 1903 renferme une étude de cet auteur *Sur la question des planètes transneptuniennes* et reposant sur ces tables. Celles-ci sont « en accord parfait avec l'observa-

tion », de sorte que, moyennant des valeurs convenables des masses, à savoir

Jupiter	m = 1/1047,35
Saturne	1/3502
Uranus	1/22869
Neptune	1/19396,

la théorie de Le Verrier représente parfaitement les mouvements observés d'Uranus et de Neptune. Quant à l'hypothèse d'une seule planète transneptunienne, l'impossibilité absolue de cette admission peut être établie « d'un trait de plume » ; car « les observations d'Uranus de 1850 à 1895 n'indiquent aucune perturbation ». On voit que les tables danoises modifient le diagramme de la figure 4, de manière à aligner, aux erreurs d'observation près, les points représentatifs des discordances le long de l'axe des erreurs nulles. Enfin, d'après H. Lau, « l'admission de plusieurs astres troublants n'est pas nécessaire pour rendre compte des mouvements d'Uranus et de Neptune » ; et « cette conjecture paraît peu probable, vu l'absence totale des perturbations du rayon vecteur de Neptune ».

La nouvelle théorie d'Uranus et de Neptune, avec les tables de ces planètes, a été publiée par Gaillot, en 1910, dans les *Annales de l'Observatoire de Paris,* t. 28. On n'oserait pas parler ici, comme le faisait Lau, d'accord parfait, mais les discordances observation-théorie y subissent une réduction considérable: c'est ce qu'on voit dans le diagramme par points, partie inférieure de la figure 4, construit comme celui de la partie supérieure. Sauf en une seule année, aucune discordance ne dépasse 2"; et la question se pose de nouveau, avec plus d'insistance: est-il possible de définir, à travers ce diagramme, et superposée aux erreurs accidentelles, une erreur systématique témoin d'une cause inconnue, et révélatrice d'un membre nouveau du système planétaire?

Comme pour les résidus de la théorie de Le Verrier, P. Lowell a pensé que oui, et la figure correspondante de son mémoire porte une courbe d'erreur systématique, de 1837 à 1910. Pour nous, nous n'apercevons quelque régularité qu'à partir de 1870, d'abord d'une manière assez vague, et tout à fait nette à partir de 1880.Du reste, nous rencontrerons tantôt un mémoire de H.E. Lau où une ligne schématise aussi les résidus de la théorie de Gaillot: elle a tout autre allure que la courbe de Lowell.

A. Gaillot répond lui-même négativement, dans une note de 1907, parue aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris, et où il annonce les tables nouvelles: « L'examen approfondi des résultats précédents, dit-il, ne fournit aucune indication sérieuse relativement à l'influence que pourrait exercer une planète de masse comparable à celles d'Uranus et de Neptune se mouvant au delà de l'orbite de Neptune. Nous nous bornons à constater le fait sans en tirer aucune conclusion ». Il se fierait davantage à des perturbations de Neptune. Mais, de 1846 à 1904, le plus grand résidu de la longitude héliocentrique de cette planète n'a été que de 0",9. « Nous croyons, en effet, poursuit-il, qu'avant d'affirmer ou de nier l'existence de cette planète hypothétique, il faut que la série continue des observations de Neptune soit beaucoup plus étendue que celle dont on dispose actuellement et qui ne correspond guère qu'au tiers d'une révolution complète ».

En 1909, cependant, dans une note aux mêmes *Comptes rendus,* Gaillot manifeste un changement d'opinion. Il a repris son tableau des résidus en longitude d'Uranus, et, par un calcul rapide, cherche quelles devraient être, pour rendre compte de ces résidus, les masses et la position de deux planètes auxquelles il attribue des distances au Soleil de 44 et de 66.

Voici ce qu'il trouve :

	Planète A	Planète B
demi-grand axe	44	66
masse	1/64000	1/14000
longitude en 1910	284°,2	114°,6

Mais faut-il y voir autre chose que les résultats de calculs dont les données sont complètement incertaines? Ils ne doivent, dit l'auteur, « être acceptés qu'avec une extrême réserve. En effet, les différences entre les positions observées d'Uranus et celles qui sont calculées à l'aide de nos tables ne dépassent guère les limites des erreurs probables d'observation augmentées de celles qui résultent des imperfections de la théorie, et par conséquent n'ont pu fournir que des éléments insuffisants pour assurer l'exactitude complète de notre travail. On ne devra donc considérer les résultats précédents que comme une indication des régions du ciel où les recherches ont le plus de chance d'être couronnées de succès ».

Est-ce le changement d'attitude de Gaillot qui a provoqué celui de Lau? Voici qu'en 1914, dans le *Bulletin de la Société astronomique de France,* celui-ci calcule les éléments de deux planètes transneptuniennes perturbatrices d'Uranus. Il ménage fort habilement la transition, et part de ses résultats de 1903: «On ne doit accepter, dit-il, qu'avec une extrême réserve les conclusions tirées de l'analyse des perturbations d'Uranus ». Et tout le monde ne sait-il pas qu'une déformation des tourillons de la lunette méridienne entachait d'une erreur grave les observations de Greenwich? De sorte que, « en résumé, les perturbations de Neptune et d'Uranus sont de l'ordre des erreurs d'observation et l'on pourrait bien les rejeter sur l'influence des équations personnelles des observateurs dont on n'a pu tenir compte dans cette recherche ».

Mais ce conditionnel annonce un changement de position : « Avant de se contenter de cette solution très expéditive du problème, il convient d'examiner jusqu'à ses dernières conséquences l'hypothèse des planètes transneptuniennes ». Et avec une argumentation devant laquelle il est difficile de ne pas s'incliner, ne fût-ce que par égard pour l'image étonnante qui la soutient : « S'il est vrai que l'on s'est trop souvent laissé séduire par les feux follets des erreurs d'observation, il n'en est pas moins vrai, pour cela, que c'est dans le marais des erreurs dites systématiques que se cachent de préférence les trésors des vérités inattendues. Après tout, les perturbations de Neptune et d'Uranus peuvent être réelles et, dans ce cas, on se serait privé d'une belle découverte en s'arrêtant à une opinion qui, au fond, ne présente que le seul avantage d'échapper à toute vérification ».

Une distance héliocentrique moyenne de 46,5 rayons de l'orbite terrestre a alors été arbitrairement adoptée, et l'on a calculé la masse qu'il faudrait attribuer à la planète inconnue pour que, ayant successivement, en 1900, telle et telle longitudes, elle puisse provoquer les perturbations d'Uranus définies par une courbe approchée menée à travers le diagramme des résidus en longitude. On voit tout de suite qu'à certaines longitudes correspondent des masses négatives. Ces longitudes rejetées, il reste qu'en 1900 la longitude de la planète devait se trouver entre 30° et 120° ou entre 210° et 300°.

Mais il y a plus: à la distance héliocentrique adoptée correspond une période de perturbations de 57 ans, tandis que la

courbe des perturbations, telle qu'elle s'est montrée à Lau, présente une période de 38 ans. Il faut donc bien invoquer l'existence d'une deuxième planète transneptunienne: on lui attribue arbitrairement une distance de 71,8. Finalement, au plus avantageux,

	Planète A	Planète B
demi-grand axe	46,5	71,8
masse	1/36000	1/7000
longitude en 1900	274°,4	154°,9

résultats envers lesquels l'extrême gratuité des hypothèses sur lesquelles ils reposent nous contraint au plus grand scepticisme.

La même recherche a été entreprise par W. H. Pickering, et, sous le titre *A Search for a Planet beyond Neptune,* publiée dans les Annales de l'Observatoire de Harward College, en 1909. C'est un ouvrage sans prétentions : « Dans ce qui suit, dit l'auteur, on n'a pas essayé de présenter une élégante étude mathématique, au sens technique du mot; on n'a pas eu en vue d'autres objets que les deux suivants : d'abord déterminer s'il y a quelque probabilité à l'existence d'une planète au delà de Neptune; et ensuite, dans l'affirmative, en chercher la situation par la méthode la plus simple, la plus brève et la plus directement pratique ».

A la lecture on constate que cette méthode est celle qui a été esquissée ci-dessus, à propos du travail de Todd, sous le nom de méthode de J. Herschel. Un premier chapitre atténue autant que possible la table des discordances d'Uranus par des améliorations aux éléments de Neptune. Un second chapitre recherche une autre planète perturbatrice. On se rappelle l'essentiel de la méthode: la période des perturbations fixe la révolution de la planète et, par conséquent, sa distance, et le maximum des discordances correspond à la conjonction avec la planète troublée. Un calcul plus raffiné précise ces premiers résultats et acquiert quelques grandeurs que ceux-ci ne pouvaient pas comporter :

demi-grand axe	51,9
durée de révolution	373,5 ans
longitude au début de 1900	105°,8
masse	1/168500

c'est-à-dire deux fois la masse de la Terre. Avec une densité égale à celle de Neptune, la planète aurait, vue de la Terre, un

diamètre angulaire de 0",8. Avec un pouvoir réfléchissant (réflexion diffuse) égal à celui de Neptune, ce serait, pour l'observateur terrestre, un astre de la 11e ou de la 12e grandeur.

Nous arrivons maintenant au grand travail de Percival Lowell, *Memoir on a trans-neptunian Planet*, n° 1 du premier volume des *Memoirs of the Lowell Observatory*, 1915. Introduction excellente. Il y a, du chef des tables, trois raisons pour lesquelles les prédictions tabulaires et les observations peuvent ne pas coïncider: les erreurs inévitables des observations sur lesquelles repose le calcul des coefficients mis en œuvre dans la construction des tables; les inexactitudes de la théorie (c'est ce que nous appelons les erreurs fictives d'observation, comme celles qui se manifestent dans le mouvement du périhélie de Mercure, où l'approximation newtonienne est insuffisante); l'existence d'une influence négligée, comme celle d'une planète inconnue. On montre ensuite pourquoi la recherche des éléments de la planète inconnue comporte le calcul à nouveau de ceux de la planète troublée, ce que nous savons.

Dans ses grandes lignes, c'est la méthode de Le Verrier qui doit être appliquée, mais combien les circonstances rendent le problème plus délicat! En 1845, les discordances d'Uranus en longitude s'élevaient à 133"; aujourd'hui, il ne sagit plus que de discordances ne dépassant pas 4",5. Aussi Lowell y apporte-t-il plus de soins que Le Verrier. Celui-ci a appliqué la Théorie des erreurs sous la forme d'un dispositif empirique qui n'était pas tout à fait la méthode des moindres carrés : ici, on se pliera à toutes les exigences de cette méthode.

C'est ce qu'on a fait d'abord en soumettant au calcul les discordances en longitude laissées par la théorie de Le Verrier (1874) rapprochée des observations de Greenwich : ce sont celles du premier diagramme de la figure 4. On a trouvé ainsi une planète nouvelle dont la longitude devait être de 244° au début de 1912.

On a recommencé d'après la théorie de Gaillot (1910), c'est-à-dire d'après le second diagramme de la figure 4. La planète inconnue devait avoir, au bout de ces nouveaux calculs, une longitude de 203 à 209° au début de 1912.

Faut-il critiquer la divergence de ces deux résultats? Pas du tout: l'accord n'est pas si mauvais. Qui aurait pu espérer résul-

tats si voisins à partir de résidus aussi différents que ceux de nos deux diagrammes?

Entrons maintenant dans quelques détails. Les résultats n'étaient que de première approximation. D'autre part, nous savons que la question délicate est le choix, hypothétique, de la distance moyenne au Soleil.

Le demi-grand axe de l'orbite d'Uranus est voisin de 20 fois le rayon moyen de l'orbite terrestre. Pour Neptune on a trouvé 30. Il ne s'agit pas de reprendre la loi de Bode; il est cependant certain que, pour une planète transneptunienne, il faut supposer un rayon nettement supérieur à 30, comme de 40 à 60; adoptons un instant 50 pour fixer les idées. Aux conjonctions la distance d'Uranus et de la planète nouvelle est 20; aux oppositions elle est 70. C'est à chaque opposition, aussi bien qu'à chaque conjonction, que la perturbation passe par un maximum, car c'est dans l'une comme dans l'autre configuration que la composante tangentielle de l'attraction, gardant la même direction, change de sens en passant par zéro. Ainsi, le problème admet deux solutions, A et B, planètes qui, toutes autres choses égales, sont à peu près diamétralement opposées par rapport au Soleil.

Enfin, quelle distance héliocentrique va-t-on adopter? Ce choix se fait d'une manière excellente: on adopte successivement cinq distances arbitraires

40,5 42,5 45,0 47,5 51,25;

on détermine les autres éléments correspondants; on évalue les discordances résiduelles, et on se décide pour la distance où l'accord est le plus satisfaisant. Mais ne serait-ce pas une distance intermédiaire non envisagée? Aussi va-t-on introduire encore quelque progrès.

Pour exposer ceci, nous devons définir une grandeur dont la valeur numérique mesure les discordances résiduelles. Lorsque cette grandeur aura été définie, nous la calculerons dans chacune de nos hypothèses; chacune recevra ainsi une cote, et celle-ci exprimera la qualité de l'hypothèse: la meilleure aura la moindre cote.

Le choix de cette grandeur est donc extrêmement important: devant le tableau des résidus, qu'allons-nous adopter pour la définir? La plus grande, répond le bon sens, et ceci nous enchante, car c'est le retour à la notion d'approximation. Mais le bon sens

a parlé un peu vite. Il y a l'esprit de géométrie et l'esprit de finesse. Avec le plus grand des résidus, une seule observation, fautive sans qu'on le sache, peut tout gâter. C'est pour la même raison qu'on a appliqué, en Théorie des erreurs, plutôt que celle de l'approximation minimum, la méthode des moindres carrés, pour laquelle on a cherché (mais il faudrait dire sous quelles réserves) les valeurs les plus probables des inconnues, et non leurs valeurs les plus approximatives. Et c'est en harmonie avec la méthode des moindres carrés que la grandeur adoptée, la fonction qui va servir de cote, — cote de défaveur, — à l'hypothèse débattue, est décidément la somme des carrés des résidus correspondants. Nous l'appellerons R.

A chacun des demi-grands axes adoptés pour l'orbite nouvelle répond donc une valeur de R; d'où un diagramme en cinq points; l'abscisse de chaque point est une distance

40,5 42,5 45,0 47,5 51,25

et son ordonnée est la valeur correspondante de R. Par ces points, nous faisons passer une ligne régulière; c'est l'abscisse du point le plus bas de cette ligne qui mesure la distance héliocentrique la plus avantageuse :

pour la planète A 43,0
pour la planète B 44,7

Nous arrivons aux conclusions de Lowell:

	Planète A	Planète B
demi-grand axe	43,0	44,7
excentricité	0,202	0,195
longitude du périhélie	203°,8	19°,6
masse	1/50000	1/43900
long. au début de juillet 1914	84°,0	262°,8

Nous avons insisté sur les raisons pour lesquelles la recherche d'une planète transneptunienne s'est appuyée sur les perturbations d'Uranus plutôt que sur celles de Neptune. Le temps viendra certainement où les perturbations de Neptune seront plus avantageuses: plus grande sensibilité et disparition de l'ambiguïté en vertu de laquelle nous avons vu P. Lowell laisser le choix entre deux planètes à peu près diamétralement opposées. En 1919, W. H. Pickering a cru cette époque arrivée, et c'est aux perturbations de Neptune qu'il a appliqué la méthode qu'il

avait mise en œuvre à propos des perturbations d'Uranus: nous en trouvons les résultats dans une note assez sommaire des Annales de l'Observatoire de Harward College, au tome 82 : *The trans-neptunian Planet.* L'auteur les consigère comme de meilleures valeurs des éléments calculés par les seules perturbations d'Uranus :

demi-grand axe	55,1
durée de révolution	409 ans
excentricité	0,3
longitude du périhélie	280°,0
passage au périhélie	en 1720
masse	1/168000
longitude au début de 1920	97°,8

et l'éclat apparent est réduit à la 15e grandeur.

VII. - *PRÉDICTIONS DE TRANSNEPTUNIENNES PAR LES ORBITES COMÉTAIRES.*

Lorsque deux corps (sphériques) s'attirent, suivant la loi de Newton, proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance. ce n'est pas, indépendamment de toute autre influence, nécessairement une ellipse que chacun décrit autour de l'autre. Ce peut aussi bien être, suivant les circonstances, une hyperbole ou une parabole. La trajectoire de chaque corps est, par rapport à l'autre, une *section conique,* dont le corps considéré comme fixe occupe un foyer, et décrite conformément à la loi des aires par rapport à ce foyer.

La trajectoire est telle ou telle section conique suivant les circonstances: quelles sont ces circonstances? Il s'agit de la vitesse du corps mobile. Admettons que le corps considéré comme fixe soit le Soleil, et l'autre une planète, à laquelle est censé se réduire le système planétaire. A l'instant quelconque où nous l'envisageons, la planète se trouve à telle distance r du Soleil, et sa vitesse est V; enfin nous négligeons la masse de la planète devant la masse du Soleil, et nous représentons par k le rapport, invariable en vertu de la loi collective du système, du cube du demi-grand axe a de l'orbite au carré de la durée de révolution :

$$k = a^3/T^2.$$

Cela étant, l'orbite est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que la vitesse V est inférieure, égale ou supérieure à la quantité

$$2\pi\sqrt{\frac{2k}{r}}.$$

Si nous adoptons l'année pour unité de temps et le demi-grand axe terrestre pour unité de longueur, la valeur numérique de k est *un;* de sorte que, pourvu que nous gardions ces unités, l'orbite est elliptique, parabolique ou hyperbolique, suivant la grandeur de V par rapport à

$$8{,}885 : \sqrt{r}.$$

Il est extrêmement intéressant que, pour telle distance r de la planète au Soleil, la nature de la trajectoire ne dépende que de la grandeur de la vitesse, et non de sa direction: la raison profonde s'en trouve dans le théorème de la force vive, où la vitesse du mobile n'intervient que par sa grandeur, indépendamment de sa direction.

Représentons-nous maintenant un corps céleste qui décrive une orbite hyperbolique dont telle étoile simple voisine du Soleil occupe un foyer. Il fait partie du système planétaire de cette étoile, et y joue le rôle d'une comète. Après son passage au périastre, il s'éloigne indéfiniment, avec une vitesse indéfiniment décroissante. Imaginons que ce mouvement se fasse à peu près dans la direction du Soleil. L'attraction solaire devient de plus en plus sensible, et l'attraction de l'étoile de plus en plus négligeable. Après une trajectoire intermédiaire sur laquelle nous éclairerait la résolution du problème des trois corps, l'objet céleste s'engage progressivement sur une orbite hyperbolique dont c'est le Soleil maintenant qui occupe l'un des foyers: le voilà rattaché au système solaire, dans lequel il va tenir la fonction d'une comète. Après le passage au périhélie, il s'éloignera encore indéfiniment du Soleil, et s'attardera encore, avec une vitesse toujours diminuée, dans les espaces interstellaires, jusqu'à ce que l'attraction prépondérante d'une autre étoile l'introduise dans un nouveau système planétaire.

Ces passages d'une étoile à l'autre, dont rien n'interromperait la succession, ne sont cependant pas certains. Pendant son séjour dans notre système, par exemple, nous avons considéré cet objet migrateur comme seul en présence du Soleil: nous avons

négligé la présence des planètes. Mais supposons qu'il passe au voisinage d'une grosse planète, comme Jupiter. C'est, à nouveau, le problème des trois corps qui doit être appliqué. Puis, lorsque c'est l'attraction du Soleil qui devient prépondérante, il se peut que l'influence de Jupiter ait réduit la vitesse, eu égard à la distance à l'astre central, en dessous de la valeur caractéristique des orbites paraboliques. La trajectoire sera désormais une ellipse, et, définitivement attaché au système solaire, le corps céleste dont nous avons suivi les aventures, y prendra place parmi les comètes périodiques. On peut même montrer qu'une pareille comète a une probabilité de mouvement dans le sens direct plus grande que dans le sens rétrograde; c'est ce qu'a fait H. A. Newton en 1879 dans l'*American Journal of Science* et dans le *Report* de cette année de la *British Association for Advancement of Science : On the direct Motion of periodic Comets of short Period.*

Que l'immense majorité des comètes circulent, autour du Soleil, précisément dans le sens direct, ne suffit sans doute pas à ce que nous voyions dans pareilles captures l'origine de ces astres; mais nous allons indiquer un caractère qui nous permettra de juger d'une manière bien plus sûre cette conception cosmogoniste.

Une comète périodique qui aurait ainsi été captée par Jupiter doit avoir son aphélie au voisinage et plus probablement un peu au dehors de l'orbite de cette planète, c'est-à-dire à une distance du Soleil à peu près égale et probablement un peu supérieure à cinq fois le rayon moyen de l'orbite terrestre.

Or, voici, moyennant cette unité de longueur, le tableau des distances au Soleil des aphélies des comètes périodiques, pour les moindres de ces distances, et dans l'ordre croissant de celles-ci :

1.	Encke	4,09	9.	Wolf	5,59
2.	Tempel I	4,90	10.	Brorsen	5,61
3.	Holmès	5,10	11.	D'Arrest	5,72
4.	Tempel-Swift	5,21	12.	Perrine	5,76
5.	De Vico-Swift	5,22	13.	Tempel II	5,87
6.	Kopff	5,32	14.	Borelly	5,96
7.	Brooks	5,43	15.	Faye	5,96
8.	Pons-Winnecke	5,54	16.	Giacobini	6,00

17.	Finlay	6,07	20.	Tuttle 1858	9,54
18.	Biéla	6,23	21.	Coggia	18,83
19.	Schaumasse	6,76	22.	1866 I	19,67

L'accumulation des distances aphélie immédiatement après 4,9 est frappante, et le grand intervalle de 6,76 à 18,83, occupé par une seule comète, montre bien la réalité de cette accumulation, sans qu'on puisse parler de distribution à peu près homogène des aphélies. Il y a donc bien un groupe de comètes périodiques dont l'orbite est liée à celle de Jupiter, de manière que leur capture puisse être attribuée à cette planète.

Mais le demi-grand axe de l'orbite de Saturne est 9,5, et la comète de Tuttle 1858 semble bien avoir été retenue par cette planète dans notre système. Ces vues ne reçoivent-elles pas une nouvelle confirmation à propos d'Uranus, dont la distance héliocentrique moyenne est 19,22? Les distances aphélie des deux comètes suivantes sont en effet bien voisines de celle-ci.

Prolongeons notre tableau :

23.	Westphall	29,77	28.	Halley	35,30
24.	Olbers	33,62	29.	Dubiago	36,0
25.	Pons-Brooks	33,70	30.	Tuttle 1862	47,6
26.	De Vico	34,35	31.	Barnard	49,8
27.	Brorsen	35,07	32.	Mellisch	54,0

Une grande lacune règne encore de la comète 22 à la comète 23, dont la distance aphélie s'élève au voisinage de 30, et que serrent de près les six comètes suivantes. Si nous nous rappelons que le rayon moyen de l'orbite de Neptune est 30,11, il nous sera difficile de ne pas lui imputer le maintien de ces comètes dans notre système. Mais que dire alors des comètes Tuttle 1862 et Barnard, aux distances aphélie 47,6 et 49,8, si ce n'est qu'une planète inconnue, dont la distance héliocentrique moyenne est voisine de celle-ci, les a captées au profit du système solaire ?

Ce principe admis, il est possible de parler de cette planète d'une manière un peu plus précise. Mais les calculs que nous entreprendrions à cet effet seraient très probablement illusoires, et nous ne pourrions guère invoquer leurs résultats pour prendre place parmi les astronomes qui ont cru pouvoir conclure à tels éléments de planètes transneptuniennes, à partir des orbites cométaires. Il s'en est trouvé plusieurs. C. Flammarion est généralement cité parmi les précurseurs. Un chapitre de son ou-

vrage *Les Terres du Ciel* (1884) est intitulé *Les planètes extérieures à Neptune;* on y lit ceci: « ... il est certain que l'orbite de Neptune n'enferme pas le domaine solaire, puisqu'un grand nombre de comètes ont leur aphélie fort au delà... »; puis: « la troisième comète de 1862 [qui est la comète n° 30, ou Tuttle 1862 de notre tableau] et l'orbite aujourd'hui parfaitement déterminée des étoiles filantes du 10 août nous prouvent que Neptune n'est pas la dernière planète, et qu'il y en a une au delà, vers la distance 48 ».

A la vérité, le célèbre vulgarisateur a été précédé dans cette voie par G. Forbes, d'une manière du reste assez peu heureuse, dans un mémoire de 1880, *On Comets and ultraneptunian Planets,* que résume une note *On Comets* des *Proceedings* de la Royal Society d'Edimbourg.

Dans notre tableau des distances aphélie, nous sommes arrivés à la comète périodique n° 32. Nous allons avoir besoin d'une douzaine de comètes dont les aphélies sont plus lointains :

33.	Peters	75,3	39.	Tatcher	110,4
34.	Brooks 1885	84	40.	Perrine	111
35.	Giacobini	88	41.	Perny	111
36.	Coggia	89,1	42.	1843 I	123
37.	Bremiker	101,1	43.	1846 VII	125,3
38.	Tebbutt	109,4	44.	Brooks 1886	163

Les quatre premières, et particulièrement les n^{os} 35 et 36, pourraient être considérées comme révélatrices d'une planète transneptunienne, à une distance voisine de 85, aussi bien qu'il nous en a paru ainsi des n^{os} 30 et 31. Mais ce n'est à celles-ci ni à celles-là que G. Forbes s'est arrêté. Il a envisagé le groupe qui commence à la comète de Bremiker et dont les distances aphélie vont de 100 à 125, avant la grande lacune de 125 à 163.

Pour rapporter fidèlement les données de son étude, nous devons remplacer notre tableau, qui est récent et emprunté au bel ouvrage *Le Ciel et l'Univers* de M. l'abbé Moreux, par l'extrait convenable du tableau des éléments planétaires, tel qu'on l'écrivait vers 1880, le numérotage en chiffres arabes établissant la correspondance des deux listes, et le numérotage à la romaine étant celle de G. Forbes :

I	37	Bremiker	1840 IV	96,7
II	42		1843 I	100,0

III			1846	108,2
IV	39	Tatcher	1861 I	110,3
V	41	Perny	1793 II	111,0
VI	38	Tebbutt	1861 II	111,2
VII			1855 II	124,2

la comète n° 40, Perrine (1898, I), n'y ayant pas encore pu trouver place.

G. Forbes a attribué ces comètes à l'influence d'une planète dont la distance héliocentrique moyenne serait voisine de 100, mais il a fait mieux que de confondre le plan de son orbite avec le plan de l'écliptique. Quatre de ces comètes, à savoir I, II, IV et VII, ont leurs aphélies distribués à très peu près dans un même plan: c'est le plan de la planète nouvelle; son obliquité sur l'écliptique a la valeur considérable de 53°, et il coupe ce plan de repère suivant une longitude de 250°. Il ne reste plus qu'à trouver un mouvement quasi circulaire, centré sur le Soleil, effectué en une durée voisine de 1000 ans, qui correspondrait au rayon 100, et qui fasse passer la planète aux aphélies des comètes considérées en l'un des passages de chacune de celles-ci en ce point de son orbite. La durée de révolution conclue a été 997 ans, à quoi correspondent, ainsi qu'aux autres conditions du problème, les éléments suivants (planète A):

demi-grand axe	98
excentricité	0,08
longitude périhélie	290°
longitude juillet 1880	198°

Mais pourquoi l'auteur a-t-il repris ses calculs en supposant l'orbite nouvelle dans le plan de l'écliptique? Il trouve ainsi, avec le même demi-grand axe et la même excentricité (planète B) :

longitude juillet 1880	184°

Enfin, eu égard à six comètes dont les distances aphélie sont estimées au voisinage de 300, il défend l'existence d'une planète dont l'orbite aurait ce rayon moyen, dans un plan incliné de 45° sur celui de l'écliptique.

T. Grigull a publié en 1902 les résultats d'une recherche analogue à partir des aphélies de vingt comètes. Son travail, publié dans le *Bulletin de la Société astronomique de France*, conclut

à l'existence d'une planète transneptunienne dont les principaux éléments seraient les suivants :

demi-grand axe	50,61
durée de révolution	360 ans
longitude du nœud	90°
inclinaison très faible	

avec une longitude de 357°,5 au début de 1902.

W. H. Pickering s'est montré encore plus audacieux. Dans un grand mémoire de 1911, paru dans les Annales de l'Observatoire du Harward College, *A statistical Investigation of cometary Orbits,* il classe et discute les orbites de toutes les comètes observées, aussi bien non périodiques que périodiques. Il reconnaît la famille des comètes dues à Jupiter, dont le nombre s'élève à 34, ainsi que la famille due à la planète transneptunienne dont la distance héliocentrique moyenne est 51,9 et dont nous savons qu'il a calculé les éléments à partir des perturbations inexpliquées d'Uranus. Mais, de plus, les comètes dont les aphélies sont plus lointains lui démontrent l'existence de trois planètes, notées P, Q, R, beaucoup plus éloignées, à savoir aux distances héliocentriques 123, 875, 6250, à quoi correspondraient des durées de révolution de 1400, 26000, 500000 années, respectivement. Les masses de Q et de R seraient considérables, six fois et trois fois la masse de Jupiter, c'est-à-dire 2000 fois et 1000 fois la masse de la Terre. Il ne serait pas impossible d'apercevoir la planète Q, dans telle direction dont les coordonnées sont indiquées, et comme un astre de la 15^{e} ou de la 16^{e} grandeur. C'est à la masse énorme de cette planète, dont le plan de l'orbite serait presque perpendiculaire au plan de l'écliptique qu'on pourrait attribuer l'obliquité du plan de l'équateur solaire sur le plan invariable du système planétaire, comme l'avaient fait prévoir W. H. Pickering lui-même en 1904, dans les *Astronomische Nachrichten* et F.J.M. Stratton, en 1906, dans les *Monthly Notices.*

(A suivre.) M. ALLIAUME.

La planète transneptunienne

par M. M. Alliaume (1).

(suite et fin).

VIII. — *LA PRÉDICTION COSMOGONIQUE DE TRANSNEPTUNIENNES.*

Remontant à la cause même du phénomène, l'argument cosmogonique devrait être le plus puissant. Mais il faudrait pour ceci un système cosmogonique qui constitue une acquisition certaine de la science. Or la Cosmogonie n'est encore aujourd'hui, avec toutes les théories contradictoires qui la déchirent, qu'un ensemble, assez décevant, de conjectures plus ou moins plausibles. Peut-être n'en est-elle que plus attachante pour beaucoup d'esprits: c'est ce qui expliquerait la conviction et l'ardeur avec lesquelles chaque cosmogoniste, sans ménagement pour les conceptions rivales, défend le système qu'il a conçu et auquel, bien souvent, il consacre toute l'activité de son existence.

Un système cosmogonique, celui de T. J. J. See, prévoit des planètes transneptuniennes; nous devons nous y arrêter.

Il s'agit ici de la formation du système solaire. L'hypothèse qui se maintint le plus longtemps fut celle de Laplace: une nébuleuse solaire primitive, en rotation lente, se refroidissant et se condensant, et abandonnant des anneaux de matière; chacun de ces anneaux se transformant, par rétractation, en un corps qui circule, sur une orbite quasi ronde, dans le plan de l'anneau dont il est né, en un sens commun à tous, en vertu de la rotation primitive, autour de l'astre central, et constituant l'une des planètes du système solaire.

Pour T. See, il n'en est pas ainsi. Avec ses dimensions d'aujourd'hui, le Soleil effectue sa rotation en 25,3 jours. S'il s'étendait jusqu'à l'orbite terrestre, il faudrait à sa rotation, en vertu du théorème de la conservation des aires, une durée de 3192 ans. Comment la planète abandonnée par le Soleil lorsqu'il avait cette dimension pourrait-elle, aujourd'hui, accomplir sa révolu-

(1) Ciel et Terre, t. 46 (1930), p. 238.

tion en une année? Voici les nombres correspondants pour les planètes principales :

Planète	Révolution. années	Rotation de la nébuleuse solaire. années.
Mercure	0,24	479
Vénus	0,61	1673
la Terre	1,00	3192
Mars	1,88	7424
Jupiter	11,86	24487
Saturne	29,46	86560
Uranus	84,02	290962
Neptune	164,72	2888533

Ces nombres ont été donnés par T. See dans une note des *Astronomische Nachrichten* de 1909, t. 180, et dans le t. 2 de son grand ouvrage *Evolution of stellar Systems*. Ils s'inspirent d'une note de Babinet aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris, t. 52, 1861. Nous n'avons pas à les discuter. Remarquons cependant que la note de Babinet parle de tout autre chose: d'accord avec la conception de Laplace, elle distingue, dans le Soleil, le noyau et l'atmosphère, et c'est l'atmosphère seule qui se serait primitivement étendue au delà de l'orbite actuellement la plus lointaine. Calculés dans l'hypothèse d'un Soleil homogène, les nombres de la troisième colonne devraient être, de ce chef, considérablement réduits, et une répartition convenable des densités pourrait les ramener à ceux de la deuxième colonne.

Quoi qu'il en soit, T. See voit dans ces nombres la nécessité de renoncer à l'hypothèse de Laplace. Pour lui, l'origine des planètes est extérieure à la nébuleuse solaire. Rencontrant cette nébuleuse, des corps qui lui étaient étrangers ont été captés par elle; à partir de cet instant, constamment accru des poussières nébulaires qui tombaient à sa surface, chacun de ces corps a décrit, autour du centre du système, une orbite elliptique dont la résistance du milieu réduisait, d'une manière continue, le grand axe et l'excentricité. Telle est l'explication de la rondeur quasi parfaite des orbites planétaires. Nous laissons de côté les difficultés qui proviennent de la circulation de toutes les pla-

nètes dans le même sens, et de la faible inclinaison des plans des orbites les uns sur les autres.

Or, la nébuleuse primitive n'était certainement pas homogène, et sa densité allait en augmentant de la périphérie vers l'intérieur, par une condensation centrale de plus en plus marquée. Par conséquent, les orbites circulaires se sont dessinées en des régions de la nébuleuse relativement proches de son centre, et il doit y avoir au delà de l'orbite de Neptune, dont l'excentricité est encore si faible, toute une suite de planètes décrivant des orbites de plus en plus excentriques. La distance héliocentrique de la moins éloignée est fixée à 42,25 fois le rayon moyen de l'orbite terrestre, à quoi correspond une révolution de 272 ans. Sa longitude aurait été, en 1904, voisine de 200°. Nous n'avons pas trouvé la justification de cette distance, ni de cette longitude. Les deux planètes suivantes se trouveraient à des distances 56 et 72 : nous sommes prévenus des difficultés qu'il y aura à les apercevoir.

Des travaux de See, nous pouvons rapprocher une recherche de G. Dallet qui s'appuie sur les lois empiriques du système solaire pour placer une planète nouvelle à la distance 47, et quelques réflexions de R. du Ligondès.

IX. — *LA TRANSNEPTUNIENNE 1930.*

Nous avons analysé les principaux travaux relatifs aux planètes transneptuniennes. Quelques-uns nous ont échappé. Nous n'avons connu les recherches de Forbes que par la note dans laquelle l'auteur les a résumées devant la Philosophical Society d'Edimbourg; le mémoire étendu, annoncé sous le titre *On Comets and ultra-neptunian Planets,* n'a pas été publié. De plus, nous avons rencontré les noms de M. Gaussin, D. E. Chase et M. Delauney parmi ceux des astronomes qui se seraient occupés des transneptuniennes, sans parvenir à apprendre en quoi leurs travaux ont consisté. Nous avons obtenu treize positions dont chacune serait celle d'une transneptunienne; d'une part, ce nombre est acquis sans qu'on ait tenu compte des planètes P, Q, R de Pickering, ni des deux planètes extérieures de See; d'autre part, les remarques suivantes le réduisent à dix :

1. Les solutions A et B de Lowell ne sont pas présentées comme réalisées simultanément; la transneptunienne cherchée a les éléments A ou les éléments B; il paraît raisonnable d'attribuer une plus grande probabilité à la solution A.

2. La solution B de Pickering n'est pas proposée par cet auteur comme une solution nouvelle: c'est ce que devient la solution A après amélioration basée sur les perturbations de Neptune.

3. Il semble bien aussi que la solution B de Forbes ne soit qu'une variante de la solution A.

Voici un tableau des treize solutions rencontrées. On y a inscrit, pour chacune, le demi-grand axe a de l'orbite, et on en a déduit la durée de révolution T et le moyen mouvement héliocentrique annuel n; on y a inscrit la longitude g pour telle époque t, indiquées l'une et l'autre par l'auteur; enfin, la dernière colonne renferme la longitude approchée G au début de 1930.

N°	AUTEUR	MÉTHODE	a	T	n	t	g	G
1	Todd	Uranus	52	375,0	0°,960	1878,0	170°,0	219°,9
2	Gaillot A	Uranus	44	291,9	1,233	1910,0	284,2	308,9
3	Gaillot B	Uranus	66	536,2	0,672	1910,0	114,6	128,0
4	Lau A	Uranus	46,5	317,1	1,135	1910,0	274,4	308,5
5	Lau B	Uranus	71,8	608,4	0,593	1900,0	154,9	172,7
6	Pickering A	Uranus	51,9	373,9	0,963	1900,0	105,8	134,7
7	Lowell A	Uranus	43,0	282,0	1,281	1914,5	84,0	103,8
8	Lowell B	Uranus	44,7	298,9	1,204	1914,5	262,8	281,5
9	Pickering B	Neptune	55,1	409,0	0,880	1920,0	97,8	106,6
10	Forbes A	Comètes	98	970,2	0,371	1880,5	198,0	216,4
11	Forbes B	Comètes	98	970,2	0,371	1880,5	184,0	202,4
12	Grigull	Comètes	50,6	360,0	1,000	1902,0	357,5	25,5
13	See	Cosmogonie	42,25	274 6	1,311	1904,0	200,0	234,1

Cette longitude G (1930) a été calculée au moyen de la formule

$$G = g + n\,(1930{,}0 - t)$$

et n'est, par conséquent, exacte que dans la mesure où l'excentricité de l'orbite est négligeable. Il n'aurait été qu'un peu plus pénible de tenir compte de l'excentricité, mais, bien que quelques excentricités calculées aient été assez fortes et de l'ordre de celle de l'orbite de Mercure, il ne semble pas que ce degré de

précision présente un intérêt. La figure 6, qui néglige aussi l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan de l'écliptique, montre, d'après le tableau ci-dessus, quelle est, au début de 1930 la distribution des diverses positions d'une transneptunienne dont la justification a été tentée par le calcul.

Ces diverses solutions du problème de la planète transneptunienne sont tellement différentes que nous pouvons, sans scrupule, les envisager en négligeant les petites corrections qu'il faudrait y apporter pour tenir compte des excentricités proposées.

Fig. 6. — Position, au début de 1930, de chacun des transneptuniennes prévues par les calculateurs; le centre de chaque petit cercle figure pareille position; le n° voisin est celui que porte la solution correspondante dans le tableau ci-dessus. La droite γγ' est la ligne des équinoxes, la droite σσ' la ligne des solstices. Les quatre circonférences en trait plein sont les orbites de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune; les deux circonférences en trait interrompu ont des rayons de 50 et de 100 unités astronomiques.

Ainsi la plupart de ces solutions sont fantaisistes. La capture des comètes par une planète inconnue est dépourvue de fondement, et, si bref que nous ayons été sur ce point, on pourrait nous reprocher de nous être étendu, plus qu'elles n'en valaient la peine, sur les considérations cosmogoniques.

Quant à la méthode des perturbations planétaires, qui avait fait ses preuves dans la découverte de Neptune, elle ne sera probablement applicable à la découverte d'une planète nouvelle que lorsque celle-ci aura manifesté son existence par une perturbation plus grande que celles qui ont été notées jusqu'ici, et que le

jeu des révolutions synodiques peut encore faire apparaître dans les registres d'observations. Quoi qu'il en soit, parmi les travaux mathématiques effectués jusqu'ici, les plus sérieux semblent être ceux de Pickering et de Lowell, avec les résultats suivants :

7. Lowell A, perturb. d'Uranus, G = 103°,8
9. Pickering B, perturb. de Neptune, G = 106°,6

calculés pour 1930 en négligeant, nous le répétons, l'excentricité.

On peut conclure de la manière suivante: l'existence d'une planète transneptunienne étant considérée comme possible, la région de l'écliptique sur laquelle la probabilité de la trouver est actuellement (quoique faible) la plus grande, appartient à la constellation des Gémeaux.

Les recherches anciennes ont laissé peu de traces: ce n'auraient été que des aveux d'insuccès. Nous en trouvons une sous la plume de Todd, en 1880, et une aussi dans une note d'Isaac Roberts, en 1892. En 1850, la prétendue disparition d'une étoile de la 9e grandeur, notée à l'Observatoire de Washington dans une recherche de la petite planète Hygea, avait fait croire à l'existence d'une transneptunienne à la distance 137. C'est par le télégramme sensationnel de Shapley que nous devions apprendre la longue persévérance des observateurs de Flagstaff.

Le 14 mars de cette année, la Royal Astronomical Society de Londres tenait sa réunion mensuelle sous la présidence de A. C. D. Crommelin. Le jour même, le Bureau de Copenhague s'était fait l'écho de l'événement d'Outre-Atlantique. Aussi fut-ce le grand enthousiasme. Presque toute la séance fut consacrée à l'astre nouveau; on admira fort la prudence des astronomes américains qui, en possession de leur découverte depuis le 21 janvier, ne l'avaient annoncée qu'après sept semaines d'observation, qui eussent garanti la nature du corps trouvé, attendant ainsi jusqu'au 13 mars, anniversaire de la découverte d'Uranus et centenaire de la naissance de Lowell; et un télégramme de félicitations fut adressé aux astronomes de Flagstaff : « President, council and fellows of the Royal Astronomical Society, in meeting assembled, send the Lowell Observatory their heartiest congratulations on the great discovery of the trans-neptunian planet. *Turner,* foreign secretary ».

C'est par les *Times* du 15 mars, dans leur correspondance de New York, puis dans le *Morning-Post* du 22, sous la plume de

Shapley, que nous eûmes quelques précisions. L'observatoire Lowell dispose d'une fondation due à la générosité de son créateur et dont les revenus sont affectés à la recherche de la planète prédite par celui-ci. V. M. Slypher, directeur de l'établissement, avait confié cette recherche à Clyde W. Tombaugh. Elle s'effectuait depuis 1905 au télescope photographique Lawrence

Fig. 7. — Photographie des environs de δ Gémeaux, avec la planète découverte à l'Observatoire Lowell, à l'intersection des droites auxquelles appartiennent les deux flèches.

Lowell. On nous dit que l'exploration se faisait systématiquement le long de l'écliptique, et que la moitié de ce cercle avait été parcourue. Sans doute il y a-t-il là une erreur; car pourquoi l'examen de l'écliptique aurait-il commencé au point diamétralement opposé à celui que désignaient les travaux de Lowell? A moins que l'on ait placé sa confiance dans la solution B plutôt

que dans la solution A. Et, encore, l'insuccès des recherches inspirées par la solution B ne pouvait que faire passer immédiatement à la région de l'écliptique indiquée par la solution A.

L'objet que révélaient les plaques de Flagstaff se trouvait à 1'45" à l'ouest de δ Gémeaux. Les coordonnées stellaires de cette étoile sont $\alpha = 7$ h. 29 m. 11 s. ou 112° 17' 45" et $\delta = 22°$ 8' 23", à quoi correspond une longitude G = 110° 34'. Or, compte tenu, cette fois, de l'excentricité 0,202 de l'orbite, la longitude actuelle de la planète A de Lowell devait être de 103°,6. Bien que la précision n'était pas du tout celle à laquelle s'est faite la découverte de Neptune, comme il fallait s'y attendre à cause de la délicatesse bien plus grande du problème, on voit que les astronomes américains étaient fondés à reconnaître dans le corps nouveau la planète prédite par le créateur de leur observatoire.

Les articles se multiplièrent dans les journaux scientifiques. L'*Observer* du 16 mars a fait appel à la collaboration de J. H. Jeans, et *Nature* du 21 mars à celle de A. Crommelin et de J. Jackson. Nous apprenons ainsi qu'après sa découverte au télescope Lawrence Lowell, l'astre a été observé par C. O. Lampland au grand télescope de l'observatoire, et visuellement au réfracteur de 24 pouces.

D'autres observatoires reconnurent l'objet en mouvement dans la constellation des Gémeaux. Des photographies furent publiées, qui avaient été prises, non seulement à Flagstaff, mais aussi à Yerkes, Meudon, Oxford, Königstuhl, Neu-Babelsberg. Nous reproduisons ici un cliché de Flagstaff. Quelques-unes de ces photographies furent insérées dans l'*Illustration*, où Madame Flammarion rappelait les vues prophétiques de son mari.

Nature du 28 mars renfermait un nouvel article de J. Jackson. Le mathématicien avait, dans l'intervalle, relu le mémoire de Lowell, et les perturbations d'Uranus lui avaient paru constituer des données bien incertaines pour la recherche d'une planète perturbatrice. Aussi tout ce qui se dit de la masse de l'objet nouveau est-il sujet à caution. On a parlé trop vite d'une masse comprise entre celles de Neptune et de la Terre. Et la pierre d'achoppement est la faible luminosité: Lowell prédisait une magnitude de 12 à 13; ici, il s'agit d'un astre de la 15e grandeur, ce qui fait, à égalité des densités et des albédos,

un volume 63 fois moindre. Peut-on encore, dans ces conditions, lui attribuer les perturbations d'Uranus? Mais, sinon, il n'y a pas de raison de maintenir les autres éléments indiqués par Lowell, et peut-être ne s'agit-il que d'une comète. Si c'est une comète, elle est extraordinaire, et l'intérêt de la découverte de Flagstaff n'en serait guère diminué: aucune comète connue n'approche d'être un astre dont les dimensions seraient comparables à celles de Mercure.

Les observations se multiplient et bientôt l'orbite pourra se calculer. A la grande lunette de Meudon, dont le pouvoir séparateur est 0",17, F. Baldet ne parvient pas à percevoir un diamètre sensible; or, à la distance 45 que prévoyait Lowell, l'astre calculé par celui-ci devrait avoir un diamètre apparent de 1", à peu près comme l'un des gros satellites de Jupiter; l'astre nouveau ne serait guère plus grand que la Lune. A l'observatoire de Paris, E. Esclangon organise des déterminations d'orbites. Diverses méthodes sont mises en œuvre. Les résultats sont suffisamment d'accord sur la distance héliocentrique actuelle et sur la position du plan de l'orbite: la distance est voisine de 44 unités astronomiques, la longitude du nœud ascendant est à peu près 110°, et l'objet s'éloigne assez rapidement de l'écliptique pour qu'on doive attribuer au plan de son orbite une inclinaison de plus de 30° sur le plan de l'écliptique. Ceci est important, car une aussi forte inclinaison est un caractère cométaire plutôt que planétaire. Il existe bien quelques astéroïdes où l'inclinaison est aussi grande, mais précisément, les excentricités de leurs orbites sont considérables, et, plutôt que celle de planète, n'est-ce pas la dénomination de comète qui leur conviendrait ?

Nous devons donc attendre une bonne détermination de l'excentricité; c'est l'élément dont on ne sera certain qu'en dernier lieu.

L'observatoire Lick a calculé des orbites provisoires d'après 24 observations allant du 16 mars au 5 avril. Pour un objet aussi lointain et dont la vitesse angulaire est, par conséquent, si faible, cet intervalle est manifestement insuffisant. Aussi de petites corrections apportées aux données suffisent-elles à modifier beaucoup les éléments conclus. Voici quatre solutions, dont on ne peut pas encore discuter les probabilités respectives:

demi-grand axe	37,48	53,41	41,13	41,10
durée de révolution	229	390	264	264
excentricité	0,111	0,541	0,344	0,302
longitude du nœud	109°22'	109°23'	109°22'	109°22'
inclinaison	17°7'	16°46'	17°11'	16°54'

C'est encore sur les deux derniers éléments que l'accord se fait, avec une inclinaison beaucoup moindre que celles que comportent les résultats de Paris. Quant à l'excentricité, on peut en faire ce que l'on veut, au point que deux orbites paraboliques sont aussi proposées, qui satisfont également aux observations.

Sans doute, toute conclusion est-elle prématurée. Il semble de plus en plus certain que l'objet découvert à l'observatoire Lowell n'est pas celui dont le fondateur de cet établissement avait prévu l'existence et la position, le rendant responsable des perturbations résiduelles d'Uranus. Sa masse est insuffisante. N'est-ce pas tout de même une planète, dont l'orbite serait peu aplatie, gravitant au delà de Neptune, à une distance du Soleil voisine de 43 unités astronomiques, et peut-être la première, dans l'ordre des découvertes, d'un groupe comparable à celui qui constitue, entre les orbites de Mars et de Jupiter, l'ensemble des astéroïdes? Ou bien est-ce, par l'excentricité et l'inclinaison de son orbite, une comète immensément plus grosse que toutes les comètes connues?

Si des calculs basés sur des données plus étendues ne viennent pas la démentir, c'est à la deuxième de ces questions que permet de répondre affirmativement la circulaire 271 de l'Union astronomique, transmettant une dépêche de l'observatoire Lowell lui-même. Voici les éléments qui y sont proposés :

demi-grand axe	217
durée de révolution	3191 ans
excentricité	0,909
longitude du nœud	109°21'
inclinaison	17°21'
longitude du périhélie	12°52'

et une distance actuelle de 41,3. Avec une excentricité aussi forte, la distance périhélie descendrait à 19,64, et la nouvelle comète serait passée, en 1900, à une distance du Soleil à peine

supérieure au rayon moyen de l'orbite d'Uranus. Elle devrait atteindre son aphélie en l'an 3496, à une distance du Soleil égale à 197 unités astronomiques.

M. Alliaume.

Laboratoire d'Astronomie et de Géodésie
de l'Université de Louvain,
le 15 mai 1930.

NOTE ajoutée pendant la correction des épreuves, le 1er août 1930. — Le mathématicien américain Brown a examiné de près le mémoire de Lowell et a discuté la valeur des prédictions qu'il comporte : il n'y aurait, d'après lui, aucun rapport entre la planète annoncée et la planète découverte. — E. Esclangon, directeur de l'Observatoire de Paris, a organisé, dans son personnel, les calculs d'orbites, au fur et à mesure des observations; au plus probable, l'excentricité, difficile à déterminer, serait de 0,85, ce qui confirmerait le caractère cométaire de l'astre étudié. — P. Stroobant, directeur de l'Observatoire royal de Belgique et E. Delporte annoncent que cet astre a été retrouvé sur une plaque photographique prise à Uccle, le 27 janvier 1927; on le retrouve aussi sur quatre plaques de Mount-Wilson, datant de décembre 1919. Ces observations reculées permettent une grande amélioration des calculs. Les orbites les plus sûres semblent actuellement celles de Nicholson et de Magall, de Banachiewicz et de Crommelin, que H. N. Russell discute dans le *Scientific American:* c'est le retour à l'interprétation planétaire, avec une excentricité de 0,253 et une période de 251 ans, à quoi correspond un rayon moyen égal à 39,8 fois le rayon moyen de l'orbite terrrestre, et cette planète ne serait pas si éloignée qu'on l'avait dit d'être l'astre prédit par Lowell: ce sera, propose l'observatoire de Flagstaff, la planète Pluton.

Bibliographie (1).

J. Herschel, *Outlines of Astronomy,* 1850.

H. Faye, *Cours d'Astronomie de l'Ecole polytechnique,* Paris, t. 2, 1883, p. 200.

U. J. Le Verrier, *Recherches sur les mouvements de la planète Herschell (dite Uranus)*, Additions à la Connaissance des temps, 1849.

U. J. Le Verrier, *Mémoire sur la théorie d'Uranus,* Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 21, 1845, p. 1050; *Recherches sur les mouvements d'Uranus,* Ibid., t. 22, 1846, p. 907;

(1) Au 1er août 1930.

Sur la planète qui produit les anomalies observées dans le mouvement d'Uranus, détermination de sa masse, de son orbite et de sa position actuelle, Ibid., t. 23, 1846, p. 428; *Sur la planète qui produit les perturbations d'Uranus, cinquième et dernière partie relative à la détermination du plan de l'orbite,* Ibid., t. 23, 1846, p. 657; *Observations de la nouvelle planète avec la théorie déduite des perturbations d'Uranus,* Ibid., t. 23, 1846, p. 741.

J. C. Adams, *On the perturbations of Uranus,* Appendix (p. 621) to the Nautical Almanac for 1851 (Notice datée du 12 novembre 1846).

G. B. Airy, *An Account of some Circumstances historically connected with the Discovery of the Planet exterior to Uranus,* Monthly Notices, t. 7, 1846, p. 121.

B. A. Gould, *Report to the Smithsonian Institution on the History of the Discovery of Neptune,* Washington, Smithsonian Institution, 1850.

D. F. Arago, *Examen des remarques critiques et des questions de priorité que la découverte de M. Le Verrier a soulevées,* Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 23, 1846, p. 741; voir aussi même volume p. 659.

U. J. Le Verrier, *Recherches astronomiques,* Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires, t. 13, 1876, chapitre 26 *Théorie d'Uranus,* chap. 27 *Théorie de Neptune,* et t. 14, 1877, *Tables d'Uranus, Tables de Neptune.*

A. Gaillot, *Théorie du mouvement des planètes Uranus et Neptune par Le Verrier, Calcul à nouveau des perturbations, après rectification des valeurs primitivement adoptées pour les masses des deux planètes et pour les éléments de leurs orbites, Tables nouvelles des mouvements d'Uranus et de Neptune,* Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires, t. 28, 1910.

S. Newcomb, *Tables of the heliocentric Motion of Uranus, Tables of the heliocentric Motion of Neptune,* Astronomical Papers prepared to the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac, t. 7, pp. 287, 417.

C. Flammarion, *Astronomie populaire,* Paris, 1880, p. 591.

F. Tisserand, *Notice sur les perturbations,* dans Annuaire pour l'an 1885 publié par le Bureau des longitudes, reproduite dans F. Tisserand et H. Andoyer, *Leçons de Cosmographie,* Paris, 1889, voir p. 289.

D. P. Todd, *Preliminary Account of a speculative and pratical Search for a Trans-Neptunian Planet,* American Journal of Science, 3e série, t. 20, 1880, p. 225.

A. Gaillot, *Tables d'Uranus et de Neptune par Le Verrier, Rectification de la théorie analytique, Tables nouvelles,* Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 145, 1907, p. 1391; *Contribution à la recherche des planètes transneptuniennes,* Ibid., t. 148, 1909, p. 754.

H. E. Lau, *Sur la question des planètes transneptuniennes,* Bulletin astronomique, t. 20, 1903, p. 251; *La planète transnep-*

tunienne, Bulletin de la Société astronomique de France, t. 14, 1900, pp. 340, 472 et t. 28, 1914, p. 276.

W. H. Pickering, *A Search for a Planet beyond Neptune,* Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College, t. 61, 2me partie, 1909.

P. Lowell, *Memoir on a transneptunian Planet,* Memoirs of the Lowell Observatory, t. 1, n° 1, 1915.

W. H. Pickering, *The transneptunian Planet,* Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College, t. 82. n° 3, 1919.

C. Flammarion, *Les terres du Ciel,* Paris, 1884, pp. 745, 747.

G. Forbes, *On Comets,* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, t. 10, 1880, p. 426; *On an ultra-Neptunian Planet,* Ibid., t. 10, 1880, p. 636; *Additional note on an ultra-Neptunian Planet,* ibid., t. 11, 1881, p. 89; voir aussi Observatory, t. 3, 1880, p. 439.

H. A. Newton, *On the Origin of Comets,* American Journal of Science, 3me série, t. 16, 1878, p. 165; *On the direct Motion of periodic Comets of short Period,* British Association for the Advancement of Science, Report de 1879, p. 272; *On the Capture of the Comets by the Planets, specially by Jupiter,* National Academy of Sciences, Washington, t. 6.

L. Schulhof, *Sur les grandes perturbations des comètes périodiques,* Bulletin astronomique, t. 8, 1891, pp. 147, 191, 225.

Plummer, *The Capture of the periodic Comets,* Observatory, 1891.

T. Grigull, *Nouvelle contribution à la recherche d'une planète transneptunienne,* Bulletin de la Société astronomique de France, t. 16, 1902, pp. 31, 447.

W. H. Pickering, *A statistical Investigation of cometary Orbits* Annals of the Astronomical Observatory of Harward College, t. 61, 3e partie, 1911; *The next Planet beyond Neptune,* Popular Astronomy, t. 36, 1928, pp. 143, 218; *The three outer Planets beyond Neptune,* Ibid., t. 36, 1928, p. 417.

T. J. J. See, *Researches on the internal Densities, Pressures and Moments of Inertia of the principal Bodies of the planetary System,* Astronomische Nachrichten, t. 167, 1905, n° 3992; *On the Cause of the remarkable Circularity of the Orbits of the Planets and Satellites and on the Origin of the planetery System,* Ibid., t. 180, 1909, n° 4308.

T. J. J. See, *Researches on the Evolution of the stellar Systems;* vol. II : *The capture Theory of cosmical Evolution,* Lynn (Mass.), 1910, p. 375.

S. Laplace, *Exposition du Système du monde,* Paris, 1835, note VII.

W. H. Pickering, *Direct and retrograde Rotation of the Planets,* Astronomische Nachrichten, t. 164, 1904, n° 3925.

F. J. M. Stratton, *On planetary Inversion,* Monthly Notices, t. 66, 1905-1906, p. 374.

G. Dallet, *Contribution à l'étude des planètes situées au delà de l'orbite de Neptune,* Bulletin de la Société astronomique de France, t. 15, 1901, p. 266.

R. du Ligondes, *Au sujet des planètes transneptuniennes,* Bulletin de la Société astronomique de France, t. 17, 1903, p. 121.

I. Roberts, *Photographic Search of a Planet beyond the Orbit of Neptune,* Monthly Notices, t. 52, 1891-1892, p. 501.

Solar Eclipse of July 28, 1851, Letter of Lieutenant Maury to Hon. A. Graham, Astronomical Journal, t. 3, 1851, n° 31; *Letter from Mr. Hind to the Editor,* Ibid., t. 3, 1851, p. 78.

A. Hall, *On the supposed Discovery of a trans-neptunian Planet at the U. S. Naval Observatory in 1850,* Bulletin of the Philosophical Society of Washington, t. 3, 1878-1880, p. 20.

C. H. F. Peters, *Investigation of the Evidence of a supposed trans-neptunian Planet in Washington Observations of 1850,* Astronomische Nachrichten, t. 94, 1879, n° 2240.

A. C. D. Crommelin, *Discovery of a trans-neptunian Planet,* Nature, t. 125, 1930, n° 3151.

J. Jackson, *Lowell's Prediction of a trans-neptunian Planet,* Nature, t. 125, 1930, n° 3151; *The Planet discovered at Lowell Observatory,* ibid., t. 125, 1930, n° 3152.

F. de Roy, *Annonce de la découverte d'une planète transneptunienne,* Gazette astronomique (Anvers), t. 17, 1930, n° 196.

Meeting of the Royal Astronomical Society, 1930 march 14, The Observatory, t. 53, 1930, p. 97.

F. Baldet, *Observations à la grande lunette de Meudon, du corps céleste découvert à l'Observatoire Lowell; Sur le calcul du diamètre photométrique du corps céleste de l'Observatoire Lowell,* Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 190, 1930, pp. 790, 857.

E. Esclangon, *Sur le nouveau corps céleste découvert à l'Observatoire Lowell; Sur la position du corps céleste actuellement supposé planète transneptunienne; Sur la détermination de la position et des éléments d'une planète ou comète éloignée, application au corps céleste Lowell; Sur la détermination de la position et des éléments d'un astre (planète ou comète) par trois observations correspondant à un petit arc de l'orbite; Sur la détermination de l'orbite d'un astre (planète ou comète) par trois observations en tenant compte des perturbations exercées par d'autres planètes,* Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 190, 1930, pp. 834, 897, 957, 981, 1085, 1469.

E. Clare Bower et F. L. Whipple, *Preliminary Elements and Ephemeris of the Lowell Observatory Object,* Lick Observatory Bulletin, t. 14, 1930, n° 421.

M. Alliaume, *Simplifications à la méthode de Gauss pour la détermination des orbites dans le cas d'une planète très éloignée,* Académie royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 5e série, t. 16, 1930, p. 805.

A. Véronnet, *La planète transneptunienne, détermination d'une orbite par trois observations,* Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 191, 1930, p. 24.

B. Jekhowsky, *Sur le calcul des dimensions de l'orbite du nouveau corps céleste transneptunien,* Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 190, 1930, p. 1049.

N. Stoyko, *Sur l'orbite de l'astre transneptunien découvert à l'Observatoire Lowell; Influence des termes du troisième et du quatrième ordres dans l'emploi de la méthode de M. Esclangon pour la détermination de l'orbite d'un astre, application à l'astre transneptunien* (avec une *note* de E. Esclangon), Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 190, 1930, pp. 1275, 1379.

E. W. Brown, *On the predictions of transneptunian Planets from the perturbations of Uranus,* Proceedings of the National Academy of Science of the U. S. A., t. 16, 1930, p. 364.

E. Delporte, *Recherche de l'objet Lowell,* parmi diverses *Mitteilungen über den auf der Lowell-Sternwarte aufgefunden Himmelskörper,* Astronomische Nachrichten, t. 238 (1930), n° 5707.

N° 74.

Revue annuelle d'Astronomie

1929

par M. M. Alliaume (1)

SOMMAIRE (*)

LE SOLEIL. — *Taches et champ magnétique :* activité solaire de 1927 ; théorie nouvelle des taches solaires et de leur champ magnétique ; champ magnétique général du Soleil. — *Atmosphère solaire :* loi empirique relative à la fréquence des raies ultimes ; niveau de la couche renversante ; thermodynamique de la chromosphère ; composition quantitative de l'atmosphère solaire ; la question de l'argon dans la couronne.

LA TERRE ET LA LUNE. — *Forme et grandeur du géoïde :* la définition du géoïde parmi les surfaces de niveau ; l'arc de méridien des Alpes françaises ; hypothèse d'un géoïde ellipsoïdal non de révolution. — *Rotation de la Terre et variation des latitudes :* variation de la période de rotation de la Terre ; variation des latitudes. — *Atmosphère terrestre :* l'ozone, cause principale de l'absorption atmosphérique ; conférence de l'ozone. — *La Lune :* sélénographie ; corrections à la théorie du mouvement lunaire de Newcomb.

(1) REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, 4e série, t. 18 (1930, 2), p. 480.

(*) *Abréviations bibliographiques.* — R. A. = cette *Revue annuelle d'Astronomie* pour 1920,... 1928. — R. Q. S. = *Revue des Questions scientifiques* (Louvain). — C. R. = *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris.* — M. N. = *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (Londres). — OBS. = *The Observatory* (Londres). — B. A. A. = *Journal of the British Astronomical Association* (Londres). — APH. J. = *The Astrophysical Journal* (Chicago). — AN. J. = *The Astronomical Journal* (Albany, N. Y.). — P. A. = *Popular Astronomy* (Northfield, Minn.). — PAC. = *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* (San Francisco). — H. C. O. = *Harvard College Observatory, Circulaires, Bulletins, Annales* (Cambridge, Mass.). — L. O. B. = *Lick Obser-*

Le système planétaire. — *Système planétaire :* nouveaux progrès dans la détermination des orbites par trois observations ; calcul des éphémérides ; perturbations. — *Planètes :* polarisation de la lumière de Mercure ; satellites de Mars ; prochaine opposition d'Éros ; l'anneau des astéroïdes ; satellites de Jupiter ; satellites de Saturne. — *Comètes et étoiles filantes :* perturbations de la comète Pons de 1818 à 1928 ; étude physique des comètes ; Aquarides et Quadrantides; les étoiles filantes d'origine non cométaire. — *Cosmogonie planétaire.*

Étoiles et nébuleuses. — *Physique stellaire :* nouvelles identifications de raies eu égard à l'effet de pression ; températures stellaires ; thermodynamique stellaire. — *Étoiles doubles et étoiles variables :* distances de systèmes binaires visuels et spectroscopiques; atlas des étoiles variables ; période et magnitude absolue des Céphéides. — *Distribution et mouvement des étoiles :* mesure trigonométrique de distances d'étoiles ; la Proxima Centauri ; mesure de la distance par l'intensité d'une raie spectrale ; effet de pression dans le spectre et magnitude absolue ; mouvements propres et mesures radiales ; mouvement du Soleil. — *Amas et nébuleuses :* amas galactiques ; amas extragalactiques ; pôles galactiques ; rotation de la Galaxie ; nébuleuses spirales ; résolution de la grande nébuleuse d'Andromède ; les nébuleuses lointaines de la région Coma-Virgo ; transparence de l'espace intergalactique.

Le Soleil

Taches et champ magnétique. — L'observatoire de Greenwich a publié les résultats de ses observations des taches solaires, ainsi que des ombres et des facules, pendant l'année 1927 (1). La tache la plus étendue a été visible pendant la demi-rotation qui a commencé le 16 janvier :

vatory Bulletin (Mount-Hamilton, Cal.) — A. N. = *Astronomische Nachrichten* (Kiel). — Gd. = *Gerlands Beiträge zur Geophysik* (Leipzig). — Z. G. = *Zeitschrift für Geophysik* (Brunswick).

Notes documentaires et bibliographiques. — La rédaction de cette Revue d'Astronomie comporte des notes documentaires et bibliographiques nombreuses et souvent étendues. On a facilité la lecture du grand texte en réunissant ces notes à la fin de l'article. Voici les numéros des notes relatives aux diverses parties annoncées dans le sommaire, et les pages où elles se trouvent :

Le Soleil, notes 1 à 11, pages 236 à 238.
La Terre et la Lune, notes 12 à 21, pages 238 à 241.
Le système planétaire, notes 22 à 48, pages 241 à 245.
Les étoiles et les nébuleuses, notes 49 à 87, pages 245 à 250.

elle couvrait une aire égale à 1973 millionièmes d'un hémisphère. A partir des observations des années précédentes, F. Gösche a tenté une prédiction de l'activité solaire en 1929 (2).

Une théorie nouvelle des taches solaires et du champ magnétique dont elles sont le siège a vu le jour (3). On sait que ce champ magnétique est parfois positif, parfois négatif, équivalent au champ créé par la rotation de particules électrisées, soit dans un sens, soit dans l'autre. Les taches apparaissent généralement par couples, et les champs magnétiques des deux taches de chaque couple sont de signes contraires. Une théorie de V. Bjerkness, exposée dans cette *Revue d'Astronomie* pour 1926, rend compte de ces phénomènes, découverts par G. Hale. Dans la conception nouvelle qu'il propose, R. Gunn conserve presque entièrement la théorie du météorologiste norwégien, et y apporte des précisions : la tache serait due à un courant d'ions en mouvement hélicoïdal autour d'un champ magnétique non homogène, de sorte que le phénomène aurait pour cause une petite dissymétrie initiale dans le champ magnétique. — A propos de cette question, et des questions connexes que provoquent les orages magnétiques et les aurores boréales, S. Chapman a étudié le mouvement d'un flux de particules émises d'une manière continue par le Soleil, en une source ponctuelle (4).

Autre chose est le champ magnétique général du Soleil au-dessus de la surface et de la chromosphère, celui qui, dans la couronne, courbe les jets de particules électrisées envoyés par le Soleil. Depuis 1911, H. Deslandres a mesuré à plusieurs reprises la valeur moyenne de ce champ, extrêmement faible, de l'ordre du dix-millionième de gauss, et dont le sens est, dans l'ensemble, opposé à celui de la Terre. Cette mesure repose sur la vitesse radiale des protubérances hélicoïdales, déviées à leur base dans le sens de rotation de l'astre, et dont les vitesses radiales, à des hauteurs croissantes au-dessus du bord solaire, sont alternativement positives et négatives.

Or, en 1913, les astronomes de Mount-Wilson ont annoncé un champ magnétique général du Soleil beaucoup plus intense, de l'ordre de 25 gauss, et dont le sens est celui du

champ magnétique terrestre. — H. Deslandres a montré comment les recherches récentes de S. Chapman et de J. Evershed confirment son estimation d'un champ solaire très faible (5).

Atmosphère solaire. — H. Deslandres a annoncé en 1924 que les raies les plus fortes des spectres de ligne, les dernières à disparaître dans les mélanges, correspondent, à de faibles différences près, à des fréquences multiples d'une même fréquence élémentaire, à savoir 1062,5. Cette relation a été vérifiée sur les vingt premiers corps simples, et elle est nette surtout pour l'hélium et les éléments dont le poids atomique est un multiple de 4, qui est celui de l'hélium. La première étude a été faite sur les spectres des corps illuminés dans le laboratoire. Les grandes masses de gaz des corps célestes et en particulier l'atmosphère brillante du Soleil, la chromosphère, ont été étudiées au même point de vue (6). La masse gazeuse est alors un mélange qui comprend toujours de l'hydrogène, souvent aussi de l'hélium, et ce dernier gaz modifie le spectre des autres gaz qui sont illuminés avec lui. De plus, dans les astres, les atomes successifs sont probablement formés peu à peu par la réunion d'atomes plus légers, ou bien sont, au contraire, dissociés. On explique ainsi, au moins en partie, la proportion très différente des divers éléments dans la croûte superficielle de la Terre : les éléments dont le poids atomique est un multiple de 4 y sont en masse plus grande.

Par exemple, la plus forte raie de l'hydrogène, dont la longueur d'onde est 18751 angströms, correspond à cinq fois la fréquence élémentaire : sa fréquence est ce multiple à un excès près de 19 unités. De même, la raie ultime du calcium, de longueur d'onde 8543, correspond à onze fois la fréquence élémentaire, à un excès près de six unités.

Dans l'examen des travaux relatifs à l'atmosphère solaire, partons de la région basse de cette atmosphère, ou couche renversante. — L. d'Azambuja a déterminé le niveau de cette couche (7). Quelques raies du spectre solaire débordent la limite du spectre continu et montrent ainsi que les vapeurs qui les produisent ont encore un éclat notable à de grandes

hauteurs au-dessus de la surface : ainsi les vapeurs de calcium ionisé et d'hydrogène s'élèvent à cinq ou six mille kilomètres. Pour la plupart des éléments, les raies sont dues à la couche renversante et n'offrent pas de saillie sur le bord du spectre continu. On n'a d'indications sur leur niveau que par les photographies du spectre-éclair, obtenues pendant les éclipses totales de Soleil, quand le disque de celui-ci est tangent intérieurement au disque de la Lune. La nouvelle méthode consiste dans la comparaison, au spectrohéliographe, des diamètres des images formées successivement par la lumière d'une raie et par celle du spectre continu voisin. Les niveaux obtenus sont de 1000 à 2000 kilomètres, beaucoup moins élevés que ceux que donnait le spectre-éclair.

Sur la chromosphère (8) nous trouvons des travaux théoriques de A. Unsöld et de W. Mac Crea sur l'équilibre de l'hydrogène et du calcium ionisé aux niveaux élevés au-dessus de la surface solaire, et une note de L. d'Azambuja, qui signale une granulation chromosphérique répartie à peu près uniformément sur tout le disque et distincte de la granulation photosphérique dont les éléments sont quatre à cinq fois plus petits.

Notre connaissance de la composition du Soleil a fait de nouveaux progrès. Une synthèse en a été publiée par Ch. St John (9). La plupart des corps simples ont été reconnus dans le Soleil, et il est plus bref de donner la liste des éléments dont les travaux spectroscopiques n'ont pas permis de déceler la présence. L'intérêt se porte naturellement sur les éléments dont la présence est douteuse : ce sont l'arsenic, l'iridium, l'osmium, le phosphore, le tantale, le thorium, le thallium, l'uranium et les terres rares. Un programme de recherches est indiqué, dont l'exécution donnerait probablement des certitudes à ce sujet. Par exemple, pour l'osmium et l'iridium, les mesures de longueur d'onde les plus efficaces se feraient dans l'ultra-violet ; et dans l'infra-rouge pour le phosphore.

Il ne s'agissait là que de la présence ou de l'absence de tel élément : c'était de l'analyse qualitative. H. Deslandres a montré naguère, avec un commencement de réalisation, la possibilité d'aborder l'analyse quantitative du Soleil. C'est

ce que vient de faire H. N. Russell dans un mémoire important (10).

Le point de départ est la quantité d'énergie nécessaire à détacher un électron d'un atome déterminé. Cette énergie dépend de l'atome considéré et du niveau d'équilibre stable occupé par l'électron. Par exemple, pour l'atome d'hydrogène, 13,54 volts sont nécessaires à l'arrachement de l'électron occupant le niveau le plus proche du noyau, tandis que 3,38, 1,50 et 0,81 sont les nombres correspondants pour les niveaux successifs de plus en plus éloignés du noyau. Pour l'atome d'hélium, le premier de ces nombres devient 24,48 pour l'arrachement d'un premier électron ; mais, un premier électron ayant disparu, l'atome étant ionisé, ce nombre devient 54,16 pour l'arrachement du second électron, toujours à partir du niveau le plus intérieur. Or, il y a émission ou absorption de raies spectrales lorsqu'un électron passe d'un niveau d'énergie à un autre, et la distribution dans le spectre des raies d'un élément déterminé est réglée par les quantités d'énergie nécessaires à l'arrachement d'un électron à partir de tel ou tel niveau. C'est ainsi que le tableau des énergies d'arrachement relatives aux différents niveaux liés à un élément déterminé permet de prédire la distribution des raies dans le spectre de cet élément ; en particulier, aux hauts voltages propres aux niveaux intérieurs correspondent des raies d'autant plus lointaines dans l'ultra-violet, et vers la région des rayons X, que ces voltages sont plus élevés.

Le passage de l'analyse qualitative à l'analyse quantitative se fait ici par la théorie récente d'Unsöld, qui, à partir des notions ci-dessus, permet de passer de l'étude des raies d'un élément au nombre d'atomes de cet élément par centimètre carré de la surface solaire. Comme on le sait depuis les travaux de Deslandres et la notion des raies ultimes, il existe un minimum dans le nombre d'atomes par centimètre carré nécessaire à ce que la raie se produise, ou pour que se produise une raie d'intensité minimum : ce nombre d'atomes est de 6.10^{12}. Ainsi, s'il s'agit d'un élément dont le poids atomique est m, une ligne d'intensité minimum ne peut apparaître que pour m décigrammes de matière par

kilomètre carré de la surface du Soleil, c'est-à-dire pour 6 *m* centaines de mille tonnes pour toute la surface de l'astre, qui est de 6 millions de millions de kilomètres carrés. Par exemple, la raie du platine, dont la longueur d'onde est 3065 angströms, décèle l'existence de quelque 500 millions de tonnes de ce métal dans la couche renversante. Une table a ainsi pu être dressée, où à chacun des nombreux corps simples et de quelques corps composés correspond un nombre qui exprime son abondance dans le Soleil, à savoir le nombre de grammes qui s'en rencontrent par mètre carré de la surface de l'astre :

Lithium	0,00006
Beryllum	0,00006
Sodium	40
Magnésium	150

et ainsi de suite. Il en résulte que six éléments, à savoir le sodium, le magnésium, le silicium, le potassium, le calcium et le fer, forment les 95 % de la masse totale du Soleil. Les corps composés n'existent qu'en petite quantité ; le plus abondant est le cyanogène, à raison de quatre milligrammes par mètre carré. En volume, l'atmosphère solaire renferme 60 parties d'hydrogène, 2 d'hélium, 2 d'oxygène, 1 de vapeurs métalliques et 0,8 d'électrons libres. Ceci permet le calcul de la température et de la pression : la température de la couche renversante est de 5600° et la pression à sa base est de 5 centièmes d'atmosphère.

La question de savoir si la couronne solaire renferme de l'argon s'est posée récemment (11). Dans une étude dont il a été question ici l'an dernier, des coïncidences de certaines lignes du spectre de la couronne avec les raies du spectre de l'argon ont été mises en évidence par I. Freeman. La discussion de ces coïncidences montre qu'elles sont trop peu nombreuses pour justifier une conclusion positive ; de plus, dans les raies qui ont fait l'objet des meilleures mesures, les discordances ne peuvent pas être attribuées à l'influence des erreurs d'observation, et les coïncidences signalées n'existent que pour les raies faibles du spectre de l'argon, tandis que les raies fortes ne se retrouvent pas dans le spectre solaire.

Forme et grandeur du géoïde. — Le problème de la forme et de la grandeur de la Terre n'acquiert un sens que lorsqu'on a défini la surface, liée à la surface infiniment capricieuse de notre planète, dont on se propose de chercher la forme et la grandeur. En vue de cette définition, il faut prendre pour négligeables les variations du champ de la pesanteur, dues aux changements de configuration des astres voisins, et considérer comme indéformable, par conséquent, l'ensemble des verticales. Or , l'ensemble des verticales est un ensemble de normales, c'est-à-dire que, par chaque point, passe une surface perpendiculaire à la verticale de chacun de ses points, une *surface de niveau*. La surface cherchée pour représenter mathématiquement la surface de la Terre est, par définition, une surface de niveau particulière, à savoir celle qui passe par un point déterminé, arbitraire en principe, et choisi, dans la pratique, de façon que la surface ainsi définie se confonde, autant que ceci soit possible (et même ait un sens) avec la surface moyenne de la mer : c'est le *géoïde*.

Encore faut-il, entre les différents pays, un accord grâce auquel aux points choisis corresponde, pour le géoïde, une même surface de niveau. Aussi l'ancienne Association géodésique internationale comportait-elle une Commission du zéro international des altitudes (12). Il avait paru que la meilleure solution pratique du problème consistait à faire coïncider, dans chaque pays, le zéro normal des altitudes avec le niveau moyen d'une mer voisine. Admettons que ceci satisfasse à la condition imposée : il y a une difficulté plus immédiate.

Le niveau moyen de la mer en un point donné de la côte s'établit par des observations marémétriques suffisamment prolongées. Cette notion d'observations suffisamment prolongées suppose l'existence d'une limite du niveau moyen. Or les services marémétriques français fonctionnent à Brest depuis 1851, à Marseille depuis 1885 : le niveau moyen annuel n'y tend pas vers une position limite. On constate, pour ce niveau, un exhaussement continu d'environ trois

quarts de millimètre par an, imputé d'abord à un lent affaissement du sol. Une étude plus précise vient d'en être faite (13). Il ne s'agit pas d'un affaissement du sol, mais du passage d'une onde de marée à longue période : cette période serait de 93 ans, harmonique quintuple de la révolution de la ligne des nœuds de l'orbite lunaire. — Cette conclusion a une importance logique considérable. On voudrait définir le géoïde en considérant comme invariable l'ensemble des verticales ; et on le définit par son passage en un point qui se déplace en vertu des mêmes causes qui déforment l'ensemble des verticales !

A la vérité, cette extrême précision dans la fixation du géoïde n'a de retentissement appréciable que dans les mesures d'altitude et leur comparaison d'un pays à l'autre. Les diverses déterminations de la forme et de la grandeur du géoïde ont un sens et sont comparables aux petites variations près du zéro des altitudes (14). On sait que cette détermination se fait soit par l'exploration géométrique, soit par l'exploration dynamique du géoïde. — Dans la première méthode, la grande opération le plus récemment terminée est celle du méridien dit des Alpes françaises, due à P. Helbronner, et dont il a été longuement parlé dans cette *Revue* pour 1928. P. Helbronner vient de publier le détail des opérations, des calculs et des résultats, dans le tome IX de son monumental ouvrage *Description géométrique détaillée des Alpes françaises* (15).

Dans les opérations géométriques, limitées, dans la pratique, à des mesures d'arcs de méridien (et de parallèles), le géoïde est assimilé à un ellipsoïde de révolution autour de l'axe de rotation de la Terre. Dans les opérations dynamiques, — direction de la verticale et intensité de la pesanteur, — on n'a pas reculé devant ce que présente de probablement illusoire l'hypothèse d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, dont les deux axes les plus grands se trouveraient dans le plan de l'équateur. C'est ainsi qu'en 1928 W. Heiskanen a obtenu une ellipse équatoriale dont le grand axe l'emporterait de quelque 400 mètres sur le petit et se trouverait au voisinage du méridien de Greenwich. M. Bossolasco n'a pas admis cette conclusion et a cru apercevoir dans la théorie une erreur dont la correction exigerait une rotation

d'un quart de tour de l'ellipse équatoriale, sous prétexte que, la pesanteur étant moindre au voisinage du méridien de Greenwich qu'aux longitudes est et ouest de 90°, les points équatoriaux du géoïde doivent y être plus proches du centre de la Terre ; à quoi on ne s'est pas fait faute de répondre, au nom d'une théorie sainement interprétée (16).

Rotation de la Terre et variation des latitudes. — En 1924 et en 1926, deux nouvelles pendules sidérales ont été mises en service à l'observatoire de Greenwich. Si une pendule, soustraite aux variations de la pression atmosphérique, était parfaite, insensible aux changements de température, et dans l'hypothèse d'une rotation parfaitement uniforme de la Terre, la lecture sur cette pendule serait à chaque instant une fonction linéaire du temps sidéral. Dans la réalité, cette lecture est une fonction du temps dont la forme analytique est inconnue et dont le développement en série suivant les puissances croissantes du temps peut être arrêté au terme du second degré : c'est ce terme du second degré qui, indépendamment des variations de la température, mesure l'imperfection de la pendule. Un nouveau terme doit être ajouté à cette fonction pour exprimer l'influence des variations de température. Après un service de quelques années, le rapprochement des observations astronomiques pour la mesure du temps sidéral et des lectures sur l'horloge permet une bonne détermination des coefficients des divers termes qui viennent d'être décrits. Or, à Greenwich, malgré l'excellence des deux horloges étudiées, cette détermination a fourni une formule de correction dont les résidus ne sont pas négligeables et affectent une allure systématique (17). Ces résidus manifestent des termes non prévus de la formule de correction ; ils peuvent être dus à des irrégularités inconnues dans la longueur du balancier d'invar, dans le fonctionnement de la suspension, dans l'intensité de la pesanteur, dans la rotation de la Terre. Les recherches doivent se fixer d'abord sur la première de ces hypothèses ; on sait qu'une barre d'invar s'allonge pendant quelque temps au début de son existence ; mais l'allure de ces variations est connue, et il ne semble pas qu'elles aient quelque harmonie

avec les phénomènes constatés à Greenwich. L'hypothèse qui doit être envisagée ensuite, en ce sens que les autres paraissent négligeables devant la première et celle-ci, est celle d'une variation dans la rotation de la Terre. Dans l'étude de la nutation, la Mécanique céleste décèle une pareille variation. Le terme principal de la nutation est celui qui a pour période les dix-huit ans et deux tiers après lesquels la ligne des nœuds lunaires a fait le tour de l'écliptique ; ce terme change si lentement que sa variation peut être négligée dans la correction des pendules. Mais le deuxième terme de la nutation, celui dont la période est de six mois, a une variation trop rapide pour qu'on puisse la négliger. C'est bien cette variation qui paraît responsable des résidus inexpliqués dans le service des horloges de haute précision. D'après les observations de Greenwich, il y correspondrait une diminution actuelle d'une vingtaine de secondes par an dans la durée de rotation de la Terre.

Pour la variation des latitudes, nous ne trouvons en 1929 que des observations isolées sur lesquelles nous aurons à revenir à l'occasion de la prochaine synthèse qui en sera faite (18) : en particulier, variation de la latitude de l'observatoire de Greenwich en 1928 et de l'observatoire naval des États-Unis en 1927 et 1928.

Atmosphère terrestre. — L'extrémité violette du spectre solaire correspond à une longueur d'onde d'environ 3900 angströms, et cette limite recule à mesure que le Soleil s'éloigne du zénith, ce qui indique que la limitation du spectre solaire est due à l'absorption atmosphérique. En 1881, Cornu montra que l'absorption a pour cause un élément permanent, encore indéterminé, de l'atmosphère ; c'est Hartley qui, ayant découvert les propriétés absorbantes de l'ozone dans l'ultra-violet, émit l'hypothèse que l'ozone serait cet élément. Puis E. Meyer établit la valeur énorme du coefficient d'absorption de l'ozone, et, en 1912-1913, H. Buisson et Ch. Fabry, mesurant l'absorption atmosphérique dans l'ultra-violet, confirmèrent l'hypothèse de Hartley en montrant qu'il y a correspondance entre la courbe d'absorption de l'ozone et celle de l'absorption atmosphérique. Ainsi, « l'étude de l'absorption atmosphé-

rique permet de déterminer la quantité totale d'ozone existant dans l'atmosphère. Cette quantité est exprimée par l'épaisseur d'ozone pur que l'on obtiendrait si tout l'ozone de l'atmosphère était rassemblé et ramené à la pression atmosphérique ». Cette épaisseur, variable d'un jour à l'autre, est en moyenne de 3 mm. Réparti uniformément dans l'atmosphère, cet ozone y serait dans une proportion de trois millionièmes, beaucoup plus grande que celle qui est observée au voisinage du sol ; aussi doit-il se trouver principalement dans la haute atmosphère. L'examen de la loi de décroissance de l'intensité d'une radiation, lorsque le Soleil s'abaisse jusqu'à l'horizon, a permis de déterminer l'altitude de l'ozone atmosphérique : 40 à 50 km.

L'étude des variations de la quantité d'ozone a été faite par G. Dobson à Oxford et à Arosa. A la suite de ces recherches, il a paru utile « que les personnes intéressées dans ces questions puissent se réunir et échanger leurs idées ». Cette réunion, proposée par G. Dobson et organisée par Ch. Fabry, a eu lieu à Paris, au Laboratoire de Physique de la Sorbonne, en mai 1929, en coïncidence avec la réunion annuelle de la Société française de Physique : conférences, discussions, étude d'appareils et de méthodes, visites des laboratoires météorologiques de Trappes et du Val Joyeux. Une trentaine de mémoires et de notes ont été publiés à la suite de ces réunions (19).

La conférence d'ouverture a été faite par G. Dobson ; on y trouve l'état de la question et le programme des prochaines recherches ; on y aperçoit, malgré son extrême rareté, l'importance de l'ozone atmosphérique dans ses retentissements climatologiques et météorologiques : élévation de la température dans la haute atmosphère, due à la grande absorption de l'énergie solaire par l'ozone, et cause des zones de silence observées dans les grandes explosions ; variations de la proportion d'ozone allant jusqu'à 50 % de la teneur moyenne, et étroitement liées aux conditions dynamiques de l'atmosphère, en ce sens qu'une région atmosphérique à l'état cyclonique renferme beaucoup plus d'ozone qu'une région à l'état anticyclonique. Ces points ont été développés et discutés dans les autres communications.

La Lune. — Dans les études photographiques lunaires faites à Dedham au moyen du télescope Cassegrain de 24 pouces par H. G. Tomkins, la trace d'un immense courant de matière plastique a été décelée sur la surface de notre satellite (20). Il s'agirait d'une invasion semi-fluide qui aurait pris naissance dans la Mare Nectaris sur une aire de 27.000 milles carrés, et se serait divisée en deux branches de part et d'autre de la Mare Serenitatis ; l'une de ces branches se serait arrêtée dans la Mare Imbrium, à 1400 milles de son origine, l'autre au voisinage de Platon, à 2000 milles du point de départ.

On sait que la Mécanique céleste ne rend pas parfaitement compte des variations du mouvement lunaire : aux termes indiqués par la théorie, des termes empiriques ont dû être ajoutés. Encore que ces observations soient liées à la forme et aux dimensions de la Terre, une bonne méthode d'investigation consiste dans l'emploi des occultations des étoiles par la Lune. Aussi, dans son mémoire de 1912, « Researches on the Motion of the Moon » (*Astronomical Papers of the American Ephemeris*, t. 9, n° 1), est-ce des occultations observées de 1672 à 1908 que S. Newcomb a déduit le moyen mouvement et les autres éléments de l'orbite lunaire. Newcomb savait bien que ses calculs devraient être repris en vertu des observations immédiatement ultérieures, et il avait disposé son travail de manière que les corrections attendues s'obtinssent au prix d'un minimum de peine.

Les occultations ont été observées avec le plus grand soin par l'observatoire du Cap de 1880 à 1922 ; ce sont ces observations qui ont été mises en œuvre à partir de 1925 pour la révision du mémoire de Newcomb. H. Spencer-Jones en a publié les résultats (21). On vient d'indiquer comment la compatibilité des équations d'observation s'obtient moyennant des corrections convenables appliquées aux nombres qui expriment la forme et la grandeur de la Terre ; il en est de même en ce qui concerne l'obliquité de l'écliptique, les masses de Mercure, de Vénus et de Mars, et les dimensions de la Lune.

Le système planétaire

Système planétaire. — Trois observations sont algébriquement suffisantes à la détermination d'une orbite planétaire. Le passage des résultats des observations aux valeurs numériques des éléments de l'orbite peut se faire de diverses manières dont les unes ressortissent à la méthode de Laplace, les autres à la méthode de Gauss : les premières partent des équations différentielles du mouvement planétaire, les secondes partent des équations finies de ce mouvement.

Parmi les variantes modernes de la méthode de Laplace se trouve le dispositif de Leuschner, dont un point délicat vient d'être élucidé (22). Parmi les variantes récentes de la méthode de Gauss se trouve le dispositif de Merton, auquel viennent d'être apportés quelques perfectionnements (23).

L'orbite déterminée, il faut établir l'éphéméride de la planète, c'est-à-dire prédire sa position à des instants convenablement choisis. En particulier, les éléments d'une orbite planétaire étant connus, parmi lesquels ceux qui définissent son plan, on demande la direction de la planète à un instant donné. Or, les lois du mouvement planétaire ne font intervenir le temps que dans la loi des aires, c'est-à-dire dans le fait que la vitesse aréolaire est constante. Il en résulte que la relation entre le temps et la direction de la planète dans le plan de son orbite ne se présente immédiatement que sous la forme d'une équation différentielle, dont la résolution du problème exige l'intégration.

Cette équation différentielle est du type le plus simple et s'intègre par une quadrature, après séparation des variables. Mais cette quadrature demande un changement de variable, qui peut se faire avec plus ou moins d'habileté. La substitution la plus avantageuse consiste dans l'introduction d'un angle remarquable auquel on a donné le nom d'anomalie excentrique. De sorte que la résolution du problème énoncé comporte celle de l'équation qui lie le temps et l'anomalie excentrique, par rapport à celle-ci. Cette équation est transcendante, et son traitement a fait l'objet de travaux nombreux. Quelques artifices nouveaux

ont été proposés en 1929 (24). L'éphéméride rédigée, on la confrontera avec les observations pour améliorer les éléments de l'orbite (25).

Dans la pratique, on ne se contente pas, même souvent dès le premier calcul, du minimum algébrique de trois observations ; une quatrième et une cinquième observation peuvent faciliter extrêmement la solution du problème : la détermination d'une orbite parabolique à partir de cinq observations a fait l'objet d'une étude récente (26). Les orbites paraboliques sont attribuées aux comètes en première approximation ; on peut se demander s'il est encore utile de se maintenir à cette approximation lorsqu'on possède déjà cinq observations : aussi l'auteur envisage-t-il des orbites elliptiques auxquelles l'éloignement de l'aphélie donne une forme quasi parabolique.

Les orbites planétaires ne sont elliptiques (ou des sections coniques) que pour autant que l'attraction des autres planètes soit négligée. Dans la théorie complète d'une planète il ne peut plus en être ainsi, et cette théorie comporte le calcul des perturbations. Ce calcul est difficile : E. Brown vient de le simplifier en adoptant pour variable indépendante la distance angulaire héliocentrique de la planète au nœud ascendant de l'orbite non troublée (27).

H. Mineur a étudié l'action du champ de gravitation de l'ensemble des étoiles sur le mouvement planétaire (28) ; comme on pouvait s'y attendre, les effets de cette action sont d'un ordre de petitesse tel qu'on ne peut songer à en trouver le retentissement dans les résultats des mesures. Il s'agit là d'attraction newtonienne, première approximation de la loi de gravitation due à la théorie de la Relativité : les applications astronomiques de celle-ci ont fait l'objet de quelques travaux, dont plusieurs sont relatifs au déplacement des périhélies (29). — Depuis l'accord établi par la Relativité entre la Mécanique et le déplacement du périhélie de Mercure, la discordance la plus saillante entre la théorie et l'observation se trouve dans le déplacement de la ligne des nœuds de l'orbite de Vénus ; H. Spencer-Jones a refait la théorie des quatre planètes les plus voisines du Soleil, et a recalculé leurs masses de manière à faire disparaître cette discordance (30).

Planètes. — La polarisation de la lumière réfléchie par Mercure a été étudiée, comme l'a été naguère celle de la lumière réfléchie par la Lune (31) ; ceci a été fait à l'Observatoire du Pic du Midi : la proportion de lumière polarisée dépend de la distance angulaire de la Terre et du Soleil par rapport à Mercure, et est de l'ordre du centième.

Les éléments de Phobos et de Deimos, les satellites de Mars, ont reçu les améliorations que permettent de leur donner les observations faites en 1926 à l'observatoire naval des États-Unis (32). En vue de la prochaine opposition d'Éros pendant l'hiver 1930-1931, si importante pour une meilleure détermination de la parallaxe solaire, et par conséquent des distances des planètes au Soleil, on a poursuivi la mesure précise des coordonnées des étoiles de la région du ciel où se trouvera Éros lors de cette opposition (33).

Cent cinquante petites planètes ont été découvertes en 1929, parmi lesquelles quatorze à l'Observatoire royal de Belgique, par É. Delporte, S. Arend et P. Bourgeois. Il y a identité probable entre quelques-unes et des astéroïdes déjà connus. Jusqu'ici 1114 planètes ont reçu des numéros définitifs (34).

L'étude statistique de l'anneau des astéroïdes a fait naguère l'objet de beaux travaux de P. Stroobant et de J. Mascart. Des remarques du même ordre ont été publiées par A. Auric et étendues aux systèmes des satellites de Jupiter et de Saturne (35). On sait que les petites planètes se distribuent en trois groupes dont les deux extrêmes renferment les astéroïdes qui ont des orbites respectivement voisines de celles de Mars et de Jupiter : un important mémoire de B. Thüring étudie les perturbations des planètes du groupe jovien (36).

Le cinquième satellite de Jupiter est celui dont la distance à la planète est la moindre ; son orbite est intérieure à celle des quatre gros satellites connus depuis Galilée ; sa situation dans le monde de Jupiter est celle de Mercure dans le système solaire ; aussi le déplacement de son périjove présente-t-il le même intérêt que celui du périhélie de cette planète ; les diverses positions constatées de ce périjove à telle et telle époque ont été rapprochées et discutées (37).

Dans chacun des systèmes satellitaires à éléments nom-

breux, ceux de Jupiter et de Saturne, la distribution des rayons moyens des orbites a fait l'objet de nouvelles études, comme il en a été tant de fois dans le système planétaire (38).

W. H. Pickering s'est appuyé sur des observations récentes de Saturne à l'observatoire de Greenwich pour attribuer certaines anomalies du mouvement de cette planète à un satellite inconnu dont la masse serait le dix-millième de la masse de Saturne, et dont les éléments sont calculés (39).

Comètes et étoiles filantes. — La comète Pons de 1818 a pu être observée pendant quatre jours, la comète Coggia-Winneke de 1873 pendant cinq jours. Leur identité a été soupçonnée par Argelander et par d'autres, mais le peu d'observations qu'on en avait ne permettait pas de s'en assurer. Or la comète découverte par Forbes à Capetown le 19 novembre 1928 consiste indubitablement dans une nouvelle apparition de la comète de Pons et de la comète de Coggia-Winneke, dont l'identité est ainsi démontrée. On dispose donc de trois arcs de la trajectoire de ce corps, et ceci permet l'étude des perturbations qu'il a subies dans les intervalles de ses apparitions : c'est pareille étude que vient de publier A. Crommelin (40).

Depuis qu'on sait que les étoiles filantes résultent d'effritements cométaires, de nombreuses recherches ont été faites sur la stabilité et la désintégration des comètes. Rares sont celles dans lesquelles le problème a été envisagé du point de vue physique. Il semble cependant possible, dit N. Bobrovnikoff, que la découverte de quelque corrélation entre l'éclat des comètes et tel ou tel élément de l'orbite nous instruise sur la manière dont s'effectue la désintégration, et d'abord nous apprenne s'il est vrai qu'au cours du temps la comète perd ses éléments gazeux, comme en préparation de sa dispersion météorique. D'où une belle étude de cet astronome, qui a fait porter les recherches sur 94 comètes périodiques, et trouve une corrélation entre l'éclat et telle fonction, qu'il appelle dissipative, du grand axe et de l'excentricité de l'orbite (41). De plus, il paraît y avoir corrélation entre cette fonction et la richesse de la tête et de la queue de la comète en éléments gazeux ; et une théorie

d'ordre cosmogonique est proposée, qui définit sous un aspect nouveau une hypothèse sur l'origine des comètes et leur capture par les planètes.

Les Aquarides sont les étoiles filantes de mai et d'avril dont le point radiant se trouve dans la constellation du Verseau. La situation méridionale de leur radiant n'a guère été favorable, jusqu'il y a peu de temps, à leur observation. Celle-ci a pu se faire, en mai 1929, dans de bonnes conditions, à Auckland, Nouvelle-Zélande (42) ; elle a permis de conclure à un essaim météorique issu de la comète de Halley. On se rappelle combien la comète de Halley a perdu de son éclat, de son avant-dernière à sa dernière apparition, à savoir de 1834 à 1910.

Les Quadrantides doivent leur nom à ce que leur radiant se trouve dans le Quadrans Muralis, constellation créée par Lalande aux confins du Dragon, d'Hercule et du Bouvier, et qui a aujourd'hui disparu des atlas stellaires. Nous traversons leur essaim dans les premiers jours de janvier. Leur histoire jusqu'en 1927 et des observations nouvelles ont été publiées à Harvard College dans le courant de 1929 (43). La même institution a déterminé le radiant des Léonides.

L'origine cométaire des étoiles filantes est généralement admise, et cette hypothèse est ordinairement présentée de manière que les essaims météoriques doivent être attribués à des comètes périodiques. Cependant bien des étoiles filantes ont des vitesses trop grandes pour que l'origine cométaire puisse continuer d'être la seule envisagée : des observations récentes ont montré que, dans la majorité des cas, la vitesse du météore correspond à une orbite hyperbolique le long de laquelle il arrive des espaces interstellaires, tel quel, et indépendamment de toute comète (44).

Cosmogonie planétaire. — R. Wavre poursuit ses études sur la figure d'équilibre d'une masse fluide en rotation uniforme (45) ; il aborde aujourd'hui le problème de manière à assurer la convergence des séries utilisées. — É. Belot a appliqué sa cosmogonie dualiste à la condensation sphéroïdale de l'anneau nébulaire qui devait donner naissance à la Terre (46).

A. Véronnet a cherché l'origine de la rotation, dans le même sens et à peu près dans le même plan, de l'immense majorité des astres du système solaire (47) ; il établit deux théorèmes qui lui permettent, dit-il, d'expliquer mathématiquement et sans hypothèse ce fait signalé comme fondamental par Laplace et par Poincaré. De l'un de ces théorèmes, il résulte que le moment de rotation de l'ensemble du système ne peut avoir qu'une origine extérieure à celui-ci; l'autre met en évidence les conditions dans lesquelles la rotation d'une planète sera directe ou rétrograde. — Enfin, à propos même du sens unique de circulation des planètes, H. Jeffreys a apporté quelques précisions à sa théorie de la naissance du système planétaire par la collision d'une étoile et du Soleil primitif (48).

Les étoiles et les nébuleuses

Physique stellaire. — La position d'une raie spectrale dépend de la pression qui règne à la source. Ainsi une raie observée en tel endroit du spectre pourrait, moyennant une pression convenable à la source, être due à un gaz qui provoque au laboratoire, pour une pression différente, une raie dont la position serait seulement voisine de celle de la raie observée. C'est ce qu'a examiné O. Struve sur les spectres d'étoiles où les raies du carbone simplement ionisé et du silicium doublement ionisé sont particulièrement nettes. L'effet de pression, qui semble plus accentué pour les étoiles naines que pour les étoiles géantes, a été appliqué à l'identification de raies dont l'origine est inconnue avec des raies du spectre de l'hélium (49). Une étude ayant le même objet a été faite à l'observatoire Yerkes (50) : le nombre d'atomes d'hélium par unité de surface de l'astre y a été calculé par la méthode d'Unsöld, qui a été citée ci-dessus à propos de recherches correspondantes sur les divers éléments de l'atmosphère solaire. La même détermination a été faite pour le calcium dans quelques étoiles parmi lesquelles α Lyre et α Cygne : l'applicabilité de la théorie d'Unsöld s'est montrée bonne pour la

première, médiocre pour la seconde ; elle s'est montrée impossible pour α Aigle et α Ophiuchus (51).

Nous allons passer en revue les travaux relatifs à la température des étoiles : il ne peut être question que de la température efficace d'un astre, c'est-à-dire de celle qu'aurait un radiateur intégral doué du même rayonnement. La rétine et la plaque photographique étant sensibles à des portions différentes du spectre, la magnitude visuelle et la magnitude photographique sont mesurées par des nombres distincts : l'excès de celle-ci sur celle-là est, par définition, l'indice de couleur de l'astre. Or, la loi de rayonnement d'un radiateur intégral (qu'exprime la formule de Planck) permet d'écrire une relation entre l'indice de couleur et la température efficace, et, par conséquent, de calculer cette température lorsque l'observation a mesuré cet indice. La relation en question est une équation différentielle, et son intégration se fait moyennant une approximation dans laquelle interviennent des valeurs attribuées aux longueurs d'onde des radiations moyennes du spectre visuel d'une part, du spectre photographique d'autre part. La détermination de ces longueurs d'onde est due à A. Brill. Celui-ci a apporté en 1929 une contribution nouvelle à cette étude (52). G. Tiercy a poursuivi l'application de cette méthode à la température des Céphéides (53). Divers praticiens ont publié aussi des discussions sur la technique de la mesure du color-index, soit aux écrans, soit par la méthode photoélectrique, et des résultats de déterminations de températures stellaires (54).

La plupart des études de Physique stellaire théorique ont continué d'avoir pour objet l'équilibre thermodynamique d'une étoile, dans la voie que leur a ouverte la découverte par Eddington de la relation qui unit la masse et l'éclat (55). En spectroscopie stellaire, et en application du principe de Doppler-Fizeau, la mesure de la largeur des raies spectrales a permis la calcul de la vitesse de rotation d'un grand nombre d'étoiles (56) : il ne peut être question que de vitesse linéaire équatoriale, d'où la vitesse angulaire ne se déduirait qu'après que le rayon eût été déterminé.

Étoiles doubles et étoiles variables. — Les étoiles doubles sont visuelles, spectroscopiques ou photométriques,

sans que ces dénominations créent des classes exclusives l'une de l'autre. A l'observatoire Lick, le spécialiste des systèmes binaires, G. Aitken, a poursuivi l'observation d'un grand nombre de doubles visuelles, et publié les résultats de ses mesures pour 296 systèmes (57). — Lorsqu'une double visuelle se prête à l'observation spectroscopique de ses deux composantes, on est à même de calculer sa distance et les masses de ses composantes : après avoir rappelé et discuté les résultats antérieurs, J. H. Pitman vient d'appliquer cette méthode à 104 binaires (58) ; nous rencontrons aussi son application à telle étoile de la constellation d'Hercule (59). — Dans une étude qui présente une bibliographie abondante, O. Struve a examiné les raisons pour lesquelles les périastres des doubles spectroscopiques manifestent une tendance à s'orienter dans une direction commune (60). Enfin, E. A. Kreiken a étudié de quelle manière les étoiles doubles se distribuent parmi les naines et parmi les géantes, à savoir en nombre beaucoup plus grand dans la première de ces deux catégories (61).

L'observatoire du Vatican a publié, sous la direction du P. Hagen, la septième série de l'*Atlas Stellarum variabilium* (62). L'observatoire du Harvard College a poursuivi l'observation des variables semi-régulières, et 1929 a vu paraître quelques monographies nouvelles de pareilles étoiles, parmi lesquelles des variables de la constellation du Taureau (63). A la courbe périodique de l'éclat des variables à longue période se superposent des variations irrégulières qui ont été étudiées par A. S. Eddington (64). Quant aux variables à courte période dites Céphéides, on sait que leur intérêt réside dans la loi de Leavitt-Shapley qui lie leur période à leur magnitude absolue, et par conséquent à leur distance, par l'intermédiaire de leur grandeur apparente mesurée au photomètre ; dans la formule qui exprime cette loi, et dont les coefficients ont été déterminés empiriquement, il n'y a plus guère de doute que sur le terme constant : celui-ci a fait l'objet d'une détermination nouvelle (65). Enfin, une tentative d'extension de cette loi a été faite aux variables autres que les Céphéides (66).

Distribution et mouvement des étoiles. — Divers observatoires ont poursuivi l'exécution de leur programme

relatif à la mesure des distances stellaires par la méthode trigonométrique, ordinairement sous la forme qui applique les observations photographiques : citons les observatoires de Greenwich, du Cap, Mac Cormick et de Johannesburg (67). La distance de l'étoile la plus voisine du Soleil, la Proxima Centauri, a été mesurée avec un soin nouveau, ainsi que celle des deux autres composantes, α_1 et α_2 Centaure, du système dont elle fait partie (68) ; la parallaxe de la composante principale est 0″,749, celle du compagnon 0″,765, et celle de la Proxima 0″,785 ; ces parallaxes correspondent respectivement à des distances de 4,33, de 4,24 et de 4,13 années de lumière. — L'Université de Princeton a appliqué à 1777 étoiles doubles la méthode dynamique, valable pour les étoiles doubles à la fois visuelles et spectroscopiques (69).

O. Struve a jeté les bases d'une nouvelle méthode de détermination spectroscopique des distances stellaires (70). Cette méthode diffère entièrement de la méthode spectroscopique ordinaire, qui n'obtient la parallaxe que par l'intermédiaire de la magnitude absolue, rapprochée ensuite de la grandeur apparente ; de plus, elle est indépendante de toute hypothèse relative à la masse stellaire. Le principe se trouve dans une relation remarquée par l'auteur entre la distance de l'étoile et l'intensité de telle raie spectrale du calcium simplement ionisé. Cette relation est obtenue empiriquement par l'observation spectroscopique de nombreuses étoiles dont la distance est connue ; et il est conforme à la méthode générale des sciences d'observation d'appliquer ensuite cette relation à l'observation spectroscopique d'étoiles dont la distance est inconnue, pour en tirer celle-ci. Ceci doit cependant être examiné de plus près, et il y a lieu de s'assurer de la possibilité logique d'un lien entre les deux variables considérées. — Une autre méthode spectroscopique de détermination des parallaxes vient d'être proposée et appliquée par le même auteur (71) : le déplacement des raies permet le calcul de la pression, et (du moins en ce qui concerne les étoiles du type B) il semble bien y avoir une relation entre la pression et la magnitude absolue. La marche à suivre est donc la suivante : observation spectrographique, calcul de la pression, calcul de la magnitude absolue, obser-

vation photométrique en vue de la grandeur apparente, et calcul de la parallaxe.

Les astronomes donnent le nom de mouvement propre d'une étoile à son déplacement angulaire, tel que le font connaître les variations observées de son ascension droite et de sa déclinaison ; les observatoires n'ont pas laissé de mesurer et de publier pareils mouvements (72). Le mouvement vrai de l'étoile résulte de l'association de ce mouvement propre avec le déplacement radial, tel que le décèle le décalage des raies spectrales en vertu du principe de Doppler-Fizeau : c'est ce qui a été mis en œuvre pour un grand nombre d'étoiles faibles dont les vitesses se sont ainsi montrées considérables (73).

C'est à partir de ces déplacements résultants que doit se résoudre la question, toujours pendante, des courants stellaires au voisinage du Soleil. L'accord de l'observation avec l'hypothèse des deux courants d'étoiles demande que des retouches de plus en plus nombreuses soient apportées à cette hypothèse. Déjà la théorie ellipsoïdale ne suffit plus : J. Shilt met en évidence une distribution des vitesses qui exige l'introduction de termes nouveaux (74). — Cette étude des courants stellaires ne va naturellement pas sans une évaluation du mouvement du Soleil par rapport à l'ensemble des étoiles de son voisinage : le mouvement parallactique est la composante des déplacements stellaires due à ce déplacement du Soleil. C'est le rapprochement statistique de nombreux nouvements particuliers qui permet la recherche de celui-ci, soit pour l'ensemble des étoiles de son voisinage, soit pour certaines catégories : on a considéré le déplacement solaire, d'une part par rapport à l'ensemble des étoiles naines, d'autre part par rapport à l'ensemble des étoiles géantes (75).

Amas et nébuleuses. — Il faut distinguer les amas stellaires en amas galactiques et amas extragalactiques. Les premiers sont assez proches de nous pour faire partie de notre Galaxie ; tel est l'amas des Pléiades, qui vient de faire l'objet d'une nouvelle étude monographique (76) ; tels sont aussi l'amas des Hyades et ceux qui vont être cités, avec

les distances qui leur ont été attribuées naguère (1921) par Seares :

amas du Taureau	7000 parsecs ou 23000 années-lum.
amas de l'Écu	7000 parsecs ou 23000 années-lum.
amas de Persée	8000 parsecs ou 27000 années-lum.
amas de l'Aigle	14000 parsecs ou 47000 années-lum.

Mais on va voir combien ces évaluations demandent révision : dans un travail nouveau, qui englobe toutes les autres questions géométriques et physiques relatives à cet objet céleste, C. Krieger calcule la distance de l'amas de l'Écu (constellation dite Écu de Sobiesky, créée par Hévélius) et ne trouve plus que 2800 parsecs ou 9300 années de lumière (77). — Il n'est pas impossible de considérer notre Galaxie comme assez étendue pour englober, malgré la distance moyenne de 15000 parsecs ou 50000 années de lumière qui vient de leur être attribuée (78), les amas stellaires qui, distribués en quatre couches au moins, se trouvent, perspectivement, au voisinage de l'étoile η de la constellation de la Carène, dans l'hémisphère sud. Quant aux Nuées de Magellan, dont les mouvements propres au sein de l'une d'elles ont fait l'objet d'une étude nouvelle (79), ce sont bien des amas extragalactiques. — Enfin, à l'observatoire du Harvard College, ont été déterminées les distances de 93 amas globulaires, de 6000 à 50000 parsecs, soit de 20 000 à 170 000 années de lumière (80).

On sait que la considération de la Galaxie a donné naissance aux coordonnées galactiques, dont le plan fondamental serait le plan moyen de la Voie lactée ; les pôles de la Galaxie sont définis par les deux sens de la direction perpendiculaire. La détermination de ce plan, et par conséquent de ces pôles, aura toujours quelque chose d'arbitraire. Comme il en a été pour la longueur du mètre, il faudra introduire une définition de principe et une définition d'application. Mais on en est encore aux travaux préparatoires qui permettront d'accoler à la définition de principe une définition d'application sur laquelle on n'ait plus à revenir. Dans un article de J. Baillaud, on trouvera l'état de la question et quelques précisions nouvelles (81) ; l'Observatoire astrophysique du Canada a publié des tables et des graphiques

pour le passage des coordonnées équatoriales aux coordonnées galactiques : elles sont faites pour 280° d'ascension droite du nœud ascendant du plan galactique sur l'équateur et pour 62° d'inclinaison mutuelle de ces deux plans (82).

La question de la rotation de la Galaxie, à partir d'un déplacement d'ensemble des étoiles lointaines et des nébuleuses extragalactiques, est toujours à l'ordre du jour. Parmi les travaux récents deux mémoires importants ont été publiés par J. Oort et commentés par F. Dyson (83). Des déterminations nouvelles de cette rotation ont été faites eu égard aux mouvements propres du *Preliminary General Catalogue* de Boss et de celui du Yale Observatory (84) ; d'après ce dernier travail, la vitesse angulaire de rotation serait de l'ordre d'un centième de seconde par an.

Les nébuleuses spirales sont extragalactiques. Chacune doit être considérée comme un système stellaire analogue à notre Galaxie (85). Cette conception s'est fortifiée récemment par la résolution de nébuleuses spirales en amas stellaires : cette résolution a été faite en 1929 pour la nébuleuse 31 du catalogue de Messier, la grande nébuleuse de la constellation d'Andromède et le type des nébuleuses spirales (86), au moyen de 350 photographies prises aux télescopes de 60 et de 100 pouces de Mount-Wilson : les régions extérieures des bras de la nébuleuse apparaissent comme des essaims d'étoiles faibles ; d'après l'observation des Céphéides et l'application de la loi de Leavitt-Shapley, la distance de cette nébuleuse serait de 275 000 parsecs, ou de 917 000 années de lumière.

L'observatoire du Harvard College a découvert et étudié, aux confins des constellations de la Vierge et de la Chevelure, à mi-chemin des étoiles brillantes Arcturus et Régulus, un amas de près de 3000 petites nébuleuses, dont chacune constitue une Galaxie, un amas stellaire comparable à celui auquel appartient le Soleil. On y distingue un groupe de nébuleuses relativement brillantes, à savoir au voisinage de la quatorzième grandeur. Un second groupe, dont la grandeur va de 15 à 16, semble former un ensemble physiquement distinct du groupe précédent, et trois ou quatre fois plus lointain que celui-ci. Enfin, la même région Coma-Virgo renferme quatre groupes de nébuleuses plus faibles, comme

de la dix-septième grandeur, et sensiblement plus lointaines. Il s'agit ici de distances de l'ordre de cent millions d'années de lumière. Telle de ces nuées de galaxies est sans doute la formation la plus éloignée dont l'étude ait jamais été faite (87).

Toutes autres choses égales, à un accroissement d'une unité et demie de magnitude correspond une diminution de moitié du diamètre angulaire. Ceci est vrai dans l'hypothèse d'une transparence parfaite de l'espace. Or, cette loi ne se vérifie pas tout à fait sur les amas globulaires, de sorte qu'on aperçoit là une méthode de mesure de la transparence de l'espace intergalactique ; cependant, en toute rigueur, cette méthode n'existerait que dans l'observation d'amas qui auraient les mêmes dimensions. Il faut donc s'attendre à des résultats qui présentent une dispersion liée à celle des dimensions des amas autour de leur valeur moyenne. Les diamètres angulaires de 2775 nébuleuses planétaires de la région Coma-Virgo ont été mis en diagramme en fonction de la grandeur apparente de ces objets. A la transparence parfaite de l'espace correspondrait telle ligne moyenne de ce diagramme ; à la ligne moyenne telle qu'elle se présente correspond tel degré de non-transparence de l'espace. On obtient ainsi que, dans la direction étudiée, la transparence de l'espace est si proche d'être parfaite que la perte de lumière, sur une distance de cent millions d'années, correspond à peine à une augmentation de deux dixièmes de magnitude. M. ALLIAUME.

(1) F. DYSON, « Mean Areas and heliographic Latitudes of Sun-spots in the year 1927 », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 264.

(2) F. GÖSCHL, « Versuch einer Vorhersage der Sonnentätigkeit für 1929 », A. N., t. 234 (1929), n° 5612.

(3) R. GUNN, « A Theory of the magnetic Field associated with Sun-Spots », APH. J., t. 69 (1929, 1), p. 287. — Voir cette R. A. pour 1922, 1924 et 1926, R. Q. S., 4e série, t. 4 (1923, 2), p. 164, t. 8 (1925, 2), p. 215 et t. 12 (1927, 2), p. 355. — G. HALE, « Sun-Spots as Magnets and the periodic Reversal of their Polarity », *Nature*, t. 113 (1924, 1), p. 105. — V. BJERKNESS, « Solar Hydrodynamics », APH. J., t. 44 (1926, 2), p. 93.

(4) S. CHAPMAN, « Solar Streams of Corpuscles : their Geometry, Absorption of Light and Penetration », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 456 ; S. CHAPMAN et V. FERRARO, « The electrical State of solar Streams of Corpuscles », ibid., p. 470.

(5) H. Deslandres, « Champ magnétique du Soleil, général et extérieur », C. R., t. 189 (1929, 2), p. 413. — J. Evershed, « The solar Rotation and the Einstein Displacement derived from measures of the H and K Lines in Prominences », M. N., t. 88 (1927-1928), p. 126. — S. Chapman, « On the radial Limitation of the Sun's magnetic Field », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 57. — Travaux plus récents : J. Evershed, « The solar Rotation derived from the H and K Lines in Prominences », ibid., p. 250, « Emission Lines on the Absorption Bands of H and K », ibid., p. 566, « The normal Wave-Lengths of the Calcium Lines H and K, and the Relativity Shift of these Lines in the Prominences and Chromosphere », ibid., t. 90 (1929-1930), p. 186 ; T. G. Cowling, (titre Chapman ci-dessus), ibid., p. 140 ; V. Hase et E. Perepelkin, « The Rotation Period of the Sun derived from the H and K Calcium Lines of the Prominences », A. N., t. 236 (1929), nº 3647.

(6) H. Deslandres, « Relations simples entre les radiations les plus intenses et les plus hautes des éléments chimiques dans l'atmosphère brillante du Soleil », C. R., t. 188 (1929, 1), pp. 20 (471) et 669. — Voir, même auteur, « Remarques sur la constitution de l'atome et les propriétés des spectres de bandes », C. R., t. 169 (1919, 2), pp. 745, 1365 ; « Extension à plusieurs spectres de lignes d'une propriété déjà reconnue sur plusieurs spectres de bandes » et « Propriété commune à des spectres très divers par l'origine et la structure, action prépondérante du noyau de l'hélium », C. R., t. 179 (1924, 2), pp. 5 (235) et 1006. — La note de 1929 renferme la bibliographie des recherches expérimentales : travaux de Deslandres, Mitchell, Ricco et Abetti, Curtis et Burns.

(7) L. d'Azambuja, « Emploi du spectrohéliographe à la détermination du niveau de la couche renversante ou partie basse de la chromosphère solaire », C. R., t. 188 (1929, 1), p. 380. — Sur la couche renversante, voir encore A. Unsöld, « On the thermal Excitation of Atoms in the reversing Layer of the Sun », Aph. J., t. 69 (1929, 1), p. 322. Un autre mémoire du même auteur établit les relations théoriques entre les caractéristiques des raies du calcium et de l'hydrogène et les niveaux solaires correspondants : « On the physical Interpretation of Spectroheliograms », ibid., p. 275. — Sur le spectrohélioscope, G. Hale, « The spectrohelioscope and its work, history, instruments, adjustments and methods of observation », Aph. J., t. 70 (1929, 2), p. 265. — da Costa Lobo a entrepris l'étude systématique des images prises au spectrohéliographe de l'observatoire de Coïmbre : « Nouveau mode de représentation des particularités des couches sphériques solaires », C. R., t. 189 (1929, 2), p. 277. — Sur l'interprétation des spectres et le spectre-éclair, voir aussi Ch. St John, « The unit Character of Multiplets », Aph. J., t. 70 (1929, 2), p. 312.

(8) A. Unsöld, voir note précédente, et « A spectroscopic Determination of the Pressure in the Calcium Chromosphere », Aph. J., t. 69 (1929, 1), p. 209. — W. Mac Crea, « The Hydrogen Chromo-

sphere » et « The Mechanics of the Chromosphere », M. N., t. 89 (1928-1929), pp. 483 et 712. — L. D'AZAMBUJA, « Sur la structure de la chromosphère solaire », C. R., t. 188 (1929, 1), p. 773.

(9) CH. E. ST JOHN, « Elements unidentified or doubtful in the Sun, suggested Observations », APH. J., t. 70 (1929, 2), p. 160. Voici, d'après cette étude, la liste des éléments non reconnus dans le Soleil : argon, actinium, arsenic, or, bismuth, brome, chlore, fluor, mercure, iode, iridium, krypton, masurium, néon, osmium, phosphore, protoactinium, polonium, radium, radon, selenium, tantale, tellure, thorium, uranium, xénon, holmium, illinium, lutecium, terbium, thallium.

(10) H. N. RUSSELL, « On the Composition of the Sun's Atmosphere », APH. J., t. 70 (1929, 2), p. 11. —Voir A. UNSÖLD, « Ueber die Struktur der Fraunhoferschen Linien und die quantitative Spektralanalyse der Sonnenatmosphäre », *Zeitschrift für Physik*, t. 45 (1928), p. 765 ; R. WOLLEY, « On the central Intensities of some Absorption Lines in the solar Spectrum », M. N., t. 90 (1929-1930), p. 170 ; et CH. ST JOHN, « Excitation Potential in solar Phenomena », APH. J., t. 70 (1929, 2), p. 319. — H. N., Russell rapproche ses résultats de ceux de Miss PAYNE : Stellar Atmospheres, Cambridge (Mass.), 1925 ; voir aussi C. PAYNE et E. WILLIAMS, « Photometry of Hydrogen and Calcium Lines in stellar Spectra », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 526.

(11) I. M. FREEMAN, « The Spectrum of the Solar Corona», APH. J., t. 68 (1928, 2), p. 177. — H. N. RUSSELL et I. S. BOWEN, « Is there Argon in the Corona?», ibid., t. 69 (1929, 1), p. 198.— Sur la couronne, voir aussi : S. A. MITCHELL, « The Relation between Corona and Sun-Spots », P. A., t. 37 (1929), p. 192 ; H. KIENLE et H. SIEDENTOPF, « Beobachtung der Sonnenkorona ausserhalb der Finsternis », A. N., t. 235 (1929), n° 5617.

(12) *Comptes rendus de l'Association géodésique internationale*, Genève, 1893 : p. 124, CH. LALLEMAND, Rapport présenté au nom de la Commission du zéro international des altitudes.

(13) CH. LALLEMAND et E. PRÉVOT, « Variations lentes du niveau moyen de la mer sur le littoral français », C. R., t. 188 (1929, 1), p. 1345, et E. PRÉVOT, « Détermination du zéro international des altitudes, compte tenu de la loi de variation du niveau moyen annuel de la mer », ibid., p. 1486. — Travaux récents sur la propagation de l'onde-marée : M. BRILLOUIN, « Mouvement des océans, potentiel newtonien du bourrelet en coordonnées cylindriques », C. R, t. 188 (1929, 1), p. 1637 ; « Marées dynamiques d'un océan compris entre deux parallèles, loi de profondeur quelconque en latitude et longitude », C. R., t. 189 (1929, 2), p. 5; même titre, « organisation des calculs », et même titre, « normalisation simultanée », ibid., pp. 957, 1216 ; S. GOLDSTEIN, « Tidal Motion in rotating elliptic Basins of constant Depth », M. N., *Geophysical Supplement*, t. 2 (1929), p. 213.— D. EGINITIS a résolu l'énigme du courant de l'Euripe, violent courant alternatif dans le détroit qui sépare l'île d'Eubée

de la côte continentale de la Grèce : « The Problem of the Tide of Euripus », A. N., t. 236 (1929), n° 5660.

(14) A son assemblée générale de Madrid, en 1924, l'Union géodésique internationale a adopté un ellipsoïde de référence international. La surface choisie est l'ellipsoïde de révolution calculé par Hayford en 1909, d'après l'ensemble des déviations de la verticale déterminées aux États-Unis, et publié dans son ouvrage « Supplementary Investigation in 1909 of the Figure of the Earth and Isostasy. Ses éléments sont

rayon équatorial = 6 378 388 m.
aplatissement = 1/297.

Sous la direction du général Perrier, des tables ont été calculées et publiées, qui permettent d'obtenir pour toutes les latitudes les valeurs des éléments de l'ellipsoïde utiles dans les calculs géodésiques; voir G. PERRIER, « L'ellipsoïde de référence international, ses tables », C. R., t. 189 (1929, 2), p. 506. Ces tables sont publiées en deux volumes, l'un pour le système sexagésimal, l'autre pour le système centésimal dans l'argument en latitude, sous le titre commun *Tables de l'ellipsoïde de référence adopté par l'Assemblée générale de Madrid, le 7 octobre 1924 (dans la division sexagésimale, — dans la division centésimale) calculées, sous la direction du général G. Perrier*, par *E. Hasse*, Paris 1928.

(15) P. HELBRONNER, Description géométrique détaillée des Alpes françaises, Paris, Gauthier-Villars. — Des quatorze volumes que prévoit le plan de l'œuvre, quatre ont paru, dans l'ordre suivant : tome I en 1910, VIII en 1925, IX en 1929, II en 1930. Voici leurs sous-titres : I, Chaîne méridienne de Savoie ; VIII, Chaîne méridienne de Dauphiné-Provence ; IX, Jonction géodésique directe de la Corse au Continent français, Chaîne méridienne de Corse, Mesure de l'arc de méridien des Alpes françaises ; II, Massifs du Chablais et de Foncigny, Versant français du massif du Mont Blanc (avec un atlas : les origines iconographiques de l'œuvre géodésique).

(16) M. BOSSOLASCO, « Sur l'ellipticité de l'équateur terrestre », C. R., t. 187 (1928, 2), p. 814, t. 188 (1929, 1), pp. 46, 238, 694 ; TH. BANACHIEWICZ, même titre, C. R., t. 188 (1929, 1), pp. 46, 492 ; C. MINEO, « Sur l'orientation de l'ellipse équatoriale terrestre », C. R., t. 189 (1929, 2), p. 481. — Sur la question de l'ellipsoïde à trois axes inégaux, voir F. HOPFNER, « Zur Frage nach der Erdgestalt », A. N., t. 235 (1929), n° 5617; on y montre comment l'ellipticité de l'équateur est liée à la théorie de l'isostasie. Ce rapprochement est étudié dans K. MADER, « Die dreiachsige Erdfigur und die Isostasie », GD, t. 22 (1929), p. 318. La notion même de l'isostasie est débattue par F. HOPFNER dans « Zur Begründung der Lehre von der Isostasie », GD, t. 22 (1929), p. 115, tandis que quelques points en sont précisés par W. BOWIE, « Au sujet des prismes verticaux de la Terre ayant même masse », C. R., t. 189

(1929, 2), p. 350, et que des questions connexes sont étudiées par E. LANCASTER-JONES dans « The Computation of gravitational Effects due to irregular Mass Distributions », M. N., *Geophysical Supplement*, t. 2 (1929), p. 121. — Quant à la variation du champ de la pesanteur et, par conséquent, à la déformation de la Terre élastique, voir A. PREY, « Ueber die Elastizitätskonstante der Erde », GD, t. 23 (1929), p. 379, et L. ROSENHEAD, « Tides on a two-layer Earth », M. N., *Geophysical Supplement*, t. 2 (1929), p. 171.

(17) J. JACKSON et W. BOWYER, « The Shortt Clocks at the Royal Observatory, Greenwich », M. N., t. 88 (1927-1928), p. 465 ; J. JACKSON, « Shortt Clocks and the Earth's Rotation», ibid., t. 89 (1928-1929), p. 239. — Dans le texte, on écourtera la liste des causes possibles des variations de marche des pendules en ne citant pas les ondes sismiques et l'influence des variations du champ magnétique terrestre sur le balancier d'invar, alliage d'acier et de nickel.— Sur les perfectionnements récemment proposés pour la suspension du balancier : G. FERRIÉ, « L'enregistrement des oscillations d'un pendule sans liaisons matérielles », M. N. ,t. 89 (1929-1930), p. 713 ; F. HOPE-JONES, « Registering the Oscillations of a Pendulum without touching it », ibid., t. 90 (1930-1931), p. 154. — Voir aussi J. HAAG, « Théorie générale de la synchronisation », C. R., t. 189 (1929, 2), p. 1244. — P. LEJAY a rendu automatique l'enregistrement des passages d'un pendule par la verticale en créant un chronographe au moyen duquel on puisse prétendre à la précision du 0,0001 de seconde, tandis qu'une étude préalable des pendules à contact s'impose déjà pour les mesures au 0,001 : « Sur un procédé d'enregistrement de pendule libre, et son application aux mesures de gravité », C. R., t. 186 (1928, 1), p. 1827 ; « Sur un chronographe enregistrant le dix-millième de seconde et son application à la mesure des irrégularités des pendules astronomiques », ibid., t. 188 (1929, 1), p. 1089. — Dans la réception des signaux horaires, des différences systématiques se sont montrées entre les résultats des divers observatoires ; E. ANDERSEN a montré que ces différences peuvent être réparties en deux groupes d'oscillations, l'une avec une période courte de 12 jours, l'autre avec une ou plusieurs périodes longues encore indéterminées : « Ueber die Korrektionen der Zeitsignale », GD, t. 23 (1929), p. 356. — Ces discordances ont été étudiées de près à l'occasion de la détermination des longitudes mondiales ; G. BIGOURDAN examine les résultats de cette opération en comparant les méthodes adoptées pour la mesure de l'inclinaison dans l'usage de la lunette méridienne : « Sur la mesure de l'inclinaison de l'axe de rotation de la lunette méridienne dans les déterminations de l'heure », C. R., t. 189 (1929, 2), p. 505 ; sur les 49 lunettes employées, l'inclinaison de l'axe de 39 a été mesurée au moyen du niveau, de 8 au moyen de visées nadirales (bain de mercure), et de 2 par l'un et l'autre de ces deux procédés. — Enfin, un nouveau principe a été proposé pour la mesure du temps, application du tube à réflexion zénithale employé à l'Observatoire naval

des États-Unis pour la détermination des variations de la verticale: F. Littell et J. Willis, « A new Method of determining Time », An. J., t. 40 (1929), n° 931.

(18) F. Dyson, « Preliminary Values of the Variation of Latitude at Greenwich in 1928 », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 551, résultats communiqués et discutés à la Royal Astronomical Society : voir Obs., t. 52 (1929), pp. 79, 106. — F. B. Littell, « Variation of Latitude Observations at the U. S. Naval Observatory », An. J., t. 39 (1929), n° 914. — L. Rosenhead a publié une importante étude théorique, « The annual Variation of Latitude », M. N., *Geophysical Supplement*, t. 2 (1929), p. 140, qui doit être rapprochée du travail du même auteur sur l'élasticité de la Terre, indiqué ci-dessus à propos des déformations du géoïde.

(19) Dans Gd, t. 24 (1929-1930), avec une Introduction de Ch. Fabry ; parmi ces mémoires : G. Dobson, « Atmospheric Ozone »; D. Chalonge et P. Götz, « Comparaison entre les teneurs en ozone de la haute atmosphère pendant le jour et pendant la nuit »; H. Buisson, « Spectrographe double pour la mesure de l'ozone atmosphérique » ; Ch. Fabry, « Sur les coefficients d'absorption de l'ozone »; E. Gowan, « The Effect of Ozone on the Temperature of the upper Atmosphere » ; S. Rosseland, « On the Temperature of the upper Atmosphere ; B. Gutenberg, « Bemerkung über die Temperatur der Stratosphäre » ; A. Angström, « La quantité d'ozone dans l'atmosphère et sa relation avec les problèmes climatologiques » ; V. Bjerkness, « Sur les relations entre l'ozone et les mouvements de la troposphère ».

(20) H. G. Tomkins, « Three Features of the lunar Crust, from Photographs taken at Dedham », M. N., t. 90 (1929-1930), p. 198. — B. Fessenkoff, « Determination of the Color of the lunar Seas », A. N., t. 236 (1929), n° 5641.

(21) H. Spencer Jones, « A Revision of Newcomb's Occultation Memoir », M. N., t. 90 (1929-1930), p. 71.

(22) C. H. Smiley, « Indeterminateness in Leuschner's Method of differential Correction of Orbits », An. J., t. 39 (1929), n° 917.

(23) G. Merton, « A modification of Gauss's Method for the Determination of Orbits », M. N., t. 85 (1924-1925), p. 693 ; même titre, M. N., t. 89 (1828-1929), p. 451. — R. Innes, « A Method adapted to calculating Machines for finding the Paths of Comets and Minor Planets from Short Arcs », ibid., p. 422. [Sur les applications astronomiques de la machine à calculer, L. Comrie, « On the Application of the Brunsviga-Dupla calculating Machine to double Summation with finite Differences », M. N., t. 88 (1927-1928), p. 447]. — C. E. Adams, « Solution of Euler's Equation in a parabolic Orbit », A. N., t. 235 (1929), n° 5617.

(24) G. Bazenow, « Graphische Lösung einiger Gleichungen der theoretischen Astronomie », A. N., t. 234 (1929), n° 5614. — J. E. Willis, « On facilitating the accurate Solution of Kepler's Equation by the use of exact Equivalents », An. J., t. 39 (1929), n° 923.

(25) B. JEKHOWSKY, « Sur la correction des éphémérides des petites planètes », C. R., t. 188 (1929, 1), p. 548 ; « Sur le calcul de l'orientation du grand cercle de recherche des astéroïdes », ibid., p. 771 ; « Sur l'identification des petites planètes et sur la correction de leurs orbites d'après une observation », ibid., p. 1035. — T. BANACHIEWICZ, « Sur la correction des observations à l'aide des coordonnées rapportées au plan du mouvement », ibid., p. 1484. — G. STRACKE, « Zur Ephemeridenrechnung nach Cowell », A. N., t. 236 (1929), n° 5647.

(26) A. WILKENS, « Zur Auflösung der Grundgleichungen der parabolischen und parabelnahen Kometenbahnbestimmung aus fünf Beobachtungsdaten », A. N., t. 235 (1929), n° 5631 (voir aussi n° 5620).

(27) E. BROWN, « The planetary Theory with the true Longitude as independent Variable », M. N., t. 90 (1929-1930), p. 3.

(28) H. MINEUR, « Sur le mouvement képlérien troublé par un champ de gravitation extérieur », C. R., t. 189 (1929, 2), p. 1061.

(29) G. O. JAMES, « Euclidian Approximation to Einsteinian Motion in the solar Field », AN. J., t. 39 (1929), n° 923. — L. ROSENBAUM, « Eine einfache Beziehung zwischen der zusätzlichen Perihelbewegung und der Bahnbewegung der Planeten », A. N., t. 234 (1929), n° 5608. — G. VON GLEICH, » Invariantentheorie und Gravitation », A. N., t. 236 (1929), n° 5651, et « Zeigt die Gravitation eine Aberrationserscheinung ? », ibid., n° 5653. — A. EINSTEIN, « The new Field-Theory », OSB., t. 52 (1929), pp. 82, 114. — A. VÉRONNET, « Il y a trois espaces distincts et trois seulement : Euclide, Riemann et Cartan » et « Il y a trois dynamiques distinctes et trois seulement correspondant aux espaces d'Euclide, de Riemann et de Cartan », C. R., t. 188 (1929,1), pp. 894 et 1143. — E. BARTHEL, « Erweiterung Raumtheoretischer Denkmöglichkeiten durch die Riemannsche Geometrie », A. N., t. 236 (1929), n° 5649. — G. MANEFF, « Die Masse der Feldenergie und die Gravitation », ibid., n° 5664. — R. C. TOLMAN : « On the astronomical Implications of the De Sitter Line Element for the Universe », APH. J., t. 69 (1929, 1), p. 245. — O. HEIMSTÄDT, « Impulsraum oder Energieneum », A. N., t. 234 (1929), n° 5607. — NERONOFF suppose une loi d'attraction dont le potentiel soit une série procédant suivant les puissances successives de l'inverse de la distance : « Sur la loi de l'attraction », C. R., t. 188 (1929, 1), p. 1148. — J. LE ROUX examine le cas particulier de l'attraction newtonienne, et établit qu'elle est la seule qui soit compatible avec la stabilité de l'ensemble et qui jouisse des propriétés d'existence de l'intégrale des forces vives (ou du principe de la moindre action), du minimum de l'intégrale de l'énergie d'accélération, du minimum de l'énergie cinétique, de la continuité, du champ d'accélération : « Les bases théoriques de la loi de gravitation », C. R., t. 189 (1929, 2), p. 525.

On sait combien étroitement la théorie de la Relativité est liée

à la manière dont se propage la lumière. Voici quelques travaux récents relatifs à cette question. — P. SALET, « Sur la constance de la vitesse de la lumière », C. R., t. 188 (1929, 1), pp. 387, 1539. H. MALET, « La propagation de la lumière dans l'éther », ibid., p. 443. — R. KOUNITZKY, « On the Character of the Dependence of the Velocity of Light on the Velocity of the Source, » A. N., t. 234 (1929), n° 5613. — G. VON GLEICH, « Einige Bemerkungen zur Aberration der Planeten und der Fixsterne », ibid., n° 5608. — R. J. TRUMPLER, « The Relativity Deflexion of Light », PAC., t. 41 (1929), p. 23. — J. PORTER, même titre, ibid., p. 171. — M. LA ROSA, « Ueber die Deutung des Verhaltens von Algol und über die Veränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit », A. N., t. 236 (1929), n° 5653. — E. ESCLANGON poursuit ses recherches sur la dissymétrie de l'espace : « Les expériences de réflexion optique et la dissymétrie de l'espace », « Sur les déplacements apparents de l'étoile polaire », C. R., t. 188 (1929, 1), pp. 147, 857 ; voir aussi A. DANJON, « Déplacement périodique de la Polaire », C. R., t. 189 (1929, 2), p. 841.

(30) H. SPENCER JONES, « The secular Variations of the orbital Elements of the four inner Planets », OBS., t. 52 (1929), p. 297 ; voici, avec la masse du Soleil pour unité, les nouvelles masses proposées pour ces planètes (dernière colonne ; la colonne précédente renferme les masses actuellement adoptées, et calculées par Newcomb) :

Mercure	1/6000000	1/7500000
Vénus	1/408000	1/404000
Terre + Lune	1/329300	1/328000
Mars	1/3093500	1/3085000

(31) B. LYOT, « Polarisation de la planète Mercure », C. R., t. 186 (1929, 2), p. 425.

(32) A. HALL et H. E. BURTON, « Corrections to the Elements of the Satellites of Mars », AN. J., t. 39 (1929), n° 928.

(33) En particulier J. HAMMOND, C. WATTS, et J. WILLIS, « Observations of Eros Comparison Stars », AN. J., t. 39 (1929), n° 915. — R. TUCKER, « Comparison of meridian Places of the Eros Stars, Lick Observatory and Brussels », PAC., t. 4 (1929), p. 238. — F. MOREAU, G. BECQ, L. DECLERCK et J. VERBAANDERT, « Catalogue de 419 étoiles de comparaison pour la planète Eros à son opposition 1930-1931 », *Annales de l'Observatoire royal de Belgique*, 3e série, t. 2, 1929.

(34) « Notes on some Points connected with the recent Progress of Astronomy, Discovery of minor Planets in 1929 », M. N., t. 90 (1929-1930), p. 421.

(35) A. AURIC, « Sur l'anneau des astéroïdes », C. R., t. 188 (1929, 1), p. 490 ; « Sur une formule empirique donnant les distances auxquelles se sont formés les anneaux successifs de l'hypothèse nébulaire », C. R., t. 189 (1929, 2), p. 455. — Sur l'observation photographique des petites planètes : H. E. WOOD, « Measurement

of the Positions of Objects on photographic Plates », B. A. A., t. 39 (1929), p. 196 ; L. J. COMRIE, « Reduction of photographic Plates », ibid., p. 203 ; J. LAGRULA, « Sur le relevé rapide de la position photographique précise d'un astre errant ou non catalogué par la méthode de Schlesinger », C. R., t. 189 (1929, 2), p. 88. Sur cette méthode, F. SCHLESINGER, « Photographic Determinations of stellar Parallax », APH. J., t. 33 (1911), p. 161.

(36) B. THÜRING, « Darstellung der Bewegung eines Planeten der Jupitergruppe durch eine absolute Störungstheorie », A. N., t. 235 (1929), n° 5618. — E. DE LA VILLEMARQUÉ, « Perturbations générales par Jupiter des planètes 1025, 434, 1019 », A. N., t. 236 (1929), n° 5654.

(37) N. MIKHALSKY, « On the Motion of the Perijove of the fifth Satellite of Jupiter », A. N., t. 234 (1929), n° 5614.

(38) F. DITTRICH, « Das Gesetz im Aufbau der Trabantensysteme », A. N., t. 235 (1929), n° 5629. — L. TOPHAM, « Relations between synodic Periods in Satellite Systems », OBS., t. 52 (1929), p. 325.

(39) F. DYSON et R. CULLEN, « Greenwich Observations of the Sun and the four outer Planets », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 256. — W. H. PICKERING, « The orbit of Saturn », « The Orbit of the undiscovered Satellite U », « Satellite U of Saturn », P. A., t. 37 (1929), pp. 210, 281, 376. — A propos des satellites de Saturne, G. STRUVE, « Preliminary Results of a Comparison between visual and photographic Observations of the Satellites of Saturn made in Johannesburg in 1926 », AN. J., t. 39 (1929), n° 912.

(40) A. CROMMELIN, « The Perturbations of Comet Pons-Coggia-Winneke-Forbes from 1818 to 1928 », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 556. — A l'observatoire de Lisbonne, le passage de la comète Pons-Winneke au voisinage de la Terre en 1927-1928 a été l'occasion d'une détermination de la parallaxe solaire, pour laquelle on a trouvé 8″,815 : M. DE MELLO E SIMAS, « La comète 1927 *c* et la parallaxe solaire », A. N., t. 235 (1929), n° 5635.

(41) N. BOBROVNIKOFF, « On the Disintegration of Comets », L. O. B., n° 408 (1929). — F. HOGG, « A synopsis of cometary Spectra », H. C. O., *bull.* 863 (1929).

(42) R. A. MAC INTOSH, « The Meteor Swarm of Halley's Comet », M. N., t. 90 (1929-1930), p. 157. — En octobre 1928, le voisinage de la nouvelle Lune a rendu favorables les conditions d'observation des Orionides : même auteur, « Observations of the Orionid Meteors », ibid., p. 160.

(43) W. J. FISHER, « The Quadrantid Meteors, history to 1927 », et W. J. FISHER et M. OLMSTEAD, « A Quadrantid Radiant photographically determined », H. C. O., *circulaires* 346 et 347 (1929). — Dans l'étude des étoiles filantes, les observateurs disposent du *General Catalogue of Radiant Points*, de DENNING. — Sur l'essaim des Léonides, W. J. FISHER et M. OLMSTEAD, « The Leonid Radiant of 1898 November 14, from Harvard Photographs » et « The Leonid Radiant of 1901 photographically determined », H. C. O., *bull.* 870 (1929).

(44) C. HOFFMEISTER, « On the heliocentric Velocity of Meteors », APH. J., t. 69 (1929, 1), p. 159. — N. BOBROVNIKOFF, « The cosmological Significance of Comets », PAC., t. 41 (1929), p. 98.

(45) R. WAVRE, « Sur le problème des figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène », « Sur un desideratum formulé par Tisserand et la théorie des figures planétaires », C. R., t. 188 (1929, 1), pp. 438, 1657. — Voir aussi les travaux du même auteur dans les *Archives des Sciences physiques et naturelles* (Genève), 5e pér., t. 11 (1929) : « Sur une nouvelle méthode en géodésie supérieure », p. 17 ; « Sur les moments d'inertie de l'ellipsoïde terrestre », p. 65 ; « La seconde approximation dans la recherche de la surface libre des planètes », p. 97 ; « Nouvelles recherches des figures planétaires en seconde approximation », p. 131 ; « Complément à la théorie des figures planétaires », p. 141 ; « Sur un accord possible entre la géodésie et la théorie de la précession des équinoxes », p. 152.

(47) A. VÉRONNET, « Sur l'origine des planètes et la formation du monde », C. R., t. 188 (1929, 1), p. 550.

(48) H. JEFFREYS, « Collision and the Origin of Rotation in the solar System », « The early History of the solar System on the Collision Theory », M. N., t. 89 (1928-1929), pp. 636, 731.

(49) O. STRUVE, « Pressure Effects in stellar Spectra », APH. J., t. 70 (1929, 2), p. 85.

(50) C. T. ELVEY, « The Contours of Helium Lines in stellar Spectra », APH. J., t. 70 (1929, 2), p. 141.

(51) O. STRUVE et C. HIGGS, « The stellar Calcium Lines in spectral Types A and B », APH J., t. 70 (1929, 2), p. 131. — Sur les spectres stellaires, voir encore N.W. STORER, « A photometric Study of the continuous Spectra of giant and dwarf Stars », L. O. B., n° 410 (1929) ; F. S. HOOG, « The Photometry of unstandardized Slit Spectra », H. C. O., *circ.* 337, (1929).

(52) A. BRILL, « Ein Vorschlag zur vorläufigen Festlegung der Strahlungskonstanten », A. N., t. 235 (1929), n° 5639 ; et les principaux travaux antérieurs du même auteur sur cette question : « Die Strahlung der Sterne », *Veröff. der Universitätssternwarte zu Berlin-Babelsberg*, t. 5, fasc. 1 (1924), et (même titre) dans *Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften*, t. 3 (1924). — Sur le principe de la méthode et ses applications : J. H. JEANS, Astronomy and Cosmogony, Cambridge 1928, p. 43 ; H. N. RUSSELL, R. S. DUGAN, J. STEWART, Astronomy, A revision of Young's Manual of Astronomy, t. 2, p. 734. — Sur les températures stellaires : B. FESSENKOFF, « Determination of Star Temperatures », A. N., t. 236 (1929), n° 5659.

(53) G. TIERCY, « Note sur une formule importante de l'Astrophysique », A. N., t. 235 (1929), n° 5630.

(54) R. J. TRUMPLER, « On the Use of a half color Filter for the Determination of Color Indices », L. O. B., n° 414 (1929). — W.M. SMART, « Photoelectric Observations of two low-temperatures B-type Stars », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 545. — B. GERASIMOVIC,

« Spectro-photometric Temperatures of early Stars », H. C. O., *circ.* 339 (1929). — L. Huenagel, « Temperatures of Giants and Dwarfs », ibid., *circ.* 343. — B. Gerasimovic et C. Payne, « Note on the Temperatures of F S stars », H. C., O. *bull.* 866 (1929). E. Williams, « A Spectrophotometric Study of A Stars », ibid., *circ.* 348. — Sur un photomètre spectroscopique extrêmement sensible : C. Abbot, « Energy spectra of the Stars », Aph. J., t. 69 (1929, 1), p. 293. — Voir aussi C. Payne, « On the Determination of the maximum Intensities of stellar Absorption Lines », H. C. O. *bull.* 867 (1929).

(55) Voici les principaux travaux parus en 1929 sur la thermodynamique stellaire, et dont la plupart sont relatifs aux théories d'Eddington et de Milne : B. Gerasimovic, « Note on the Deviation of stellar Atmospheres from thermodynamic Equilibrium », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 272 ; B. Gerasimovic et D. Menzel, « Subatomic Energy and stellar Radiation », Pac., t. 41 (1929), pp. 79, 145 ; S. R. Pike, « The physical Conditions in new Stars », ibid., p. 538 ; C. Payne « Observations bearing on Milne's Generalization of the Saha Theory », H. C. O. *bull.* 867 (1929) ; E. A. Milne, « Integral Theorems at the Equilibrium of a Star », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 730 et « The Masses, Luminosities and effective Temperatures of the Stars », M. N., t. 90 (1929-1930), p. 17 [voir discussion Obs., t. 52 (1929), p. 347] ; A. S. Eddington, « Internal Circulation in rotating Stars », M. N., t. 90, p. 54 ; F. Nölke, « Gibt es für stellare Gaskugeln eine untere Massengrenze ? », A. N., t. 235 (1929), n° 5618 ; E. Hopf, « Zum Strahlungsgleichgewicht der Sternatmosphären », essai de justification mathématique de la théorie de Milne, ibid., n° 5620 ; J. Picht, « Flüssige Sterne », ibid., n° 5639 ; F. Wächter, « Zum Problem der dichten Sterne », A. N., t. 234 (1929), n° 5611, avec remarque de E. Anding, ibid., n° 5615.— N. A. Kosirev, « Einige Bemerkungen über die Methode der Untersuchung der äusseren Schichten der Sterne », A. N., t. 236 (1929), n° 5641.

(56) G. Shajn et O. Struve, « On the Rotation of the Stars », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 222.

(57) G. Aitken, « Measures of 296 A double Stars », L. O. B., n° 413 (1929).

(58) J. H. Pitman, « The Masses and absolute Magnitudes of binary Stars, An. J., t. 39 (1929), n° 918.

(59) M. Makemson, « Investigation of the Orbit, Mass and Parallax of 99 Herculis », L. O. B., n° 409 (1929). — Voir aussi F. Silbernagel, « Die Bahn von η Coronae », A. N., t. 234 (1929), n° 5615.

(60) O. Struve et A. Pogo, « Ueber die Ursache der ungleichen Verteilung der Periastronlängen bei spektroskopischen Doppelsternen », A. N., t. 234 (1929), n° 5607. — Dans la même préoccupation cosmogonique : Y. C. Chang, « A Study on the Orientation of the Orbit-planes of 16 visual Binaries having determinate Inclinations », An. J., t. 40 (1929), n° 932.

(61) E. A. KREIKEN, « On the dwarf Nature of the spectroscopic Binaries », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 589 ; « On the dwarf Nature of double Stars in general », ibid., p. 647 ; « The Distribution of the double Stars along the Giant Series », ibid., t. 90 (1929-1930), p. 212. — W. LUYTEN, « Note on the Kreiken's Paper on the dwarf Nature of spectroscopic Binaries », H. C. O. *bull.* 870 (1929).

(62) S. A. MITCHELL, « Atlas stellarum variabilium, Series VII », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 654. — Voir aussi H. SHAPLEY, « The Programme for Milky Way variables Stars », *Proceedings of the National Academy of Sciences* (Washington), t. 14 (1928), p. 825.

(63) B. GERASIMOVIC, « Investigations of Semiregular Variables (suite), H. C. O., *circ.* 338, 340, 341, 342, 344 (1929).

(64) A. S. EDDINGTON and S. PLAKIDIS, « Irregularities of Period of long-period variable Stars », M. N., t. 90 (1929-1930), p. 65. — Sur la thermodynamique des variables et des novae, voir aussi C. S. BEALS, « On the Nature of the Wolf-Rayet Emission », ibid., p. 202 ; D. MENZEL, « The Wolf-Rayet Stars », PAC., t. 41 (1928), p. 344.

(65) C. LUPLAU JANSSEN, « Nullpunkt der Period-Luminosity Kurve », A. N., t. 235 (1929), n° 5636. — Sur la loi Leavitt-Shapley, voir cette R. A. pour 1928, R. Q. S., 4e série, t. 16 (1929, 2), p. 123. — Autres travaux sur les Céphéides : H. MENDENHALL, « A spectrographic Study of β Cephei », L. O. B., n° 418 (1929) ; T. JACOBSEN, « The radial Velocity Curve of the Cepheid Variable κ Pavonis », ibid., n° 412 (1929) ; L. V. ROBINSON, « Investigations of photographic Light Curves of Cepheid Variables », H. C. O. *bull.* 871 (1929).

(66) B. MAC LAUGHLIN, « Note on the Relation of Light and Velocity Curves of variable Stars », AN. J., t. 40 (1929), n° 932.

(67) F. DYSON, « Stellar Parallax determined at the Royal Observatory, Greenwich », M. N., t. 90 (1929-1930), p. 137. — H. SPENCER JONES et J. W. JACKSON, « Stellar Parallaxes determined photographically at the Cape Observatory », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 497 et t. 90 (1929-1930), p. 190. — C. P. OLIVIER, « Trigonometric Parallaxes of twenty-six Stars », AN. J., t. 39 (1929), n° 920 ; A. VISSOTSKY et D. REUYL, « Trigonometric Parallaxes of fifty Stars », ibid. ; S. A. MITCHELL, « Trigonometric Parallaxes of thirty-one Stars », ibid. — N. O'CONNELL, « Summary of the Parallaxes of forty-eight Stars », ibid., n° 924. — Sur la constitution de la Galaxie : H. SHAPLEY et H. SWOPE, « Preliminary Indication of a massive galactic Nucleus », *Proceedings of the National Academy of Sciences* (Washington), t. 11 (1928), p. 830.

(68) H. L. ALDEN, « Alpha and Proxima Centauri », AN. J., t. 39 (1929), nos 913 et 926.

(69) H. N. RUSSELL et C. E. MOORE, « Dynamical Parallaxes of 1777 double Stars », AN. J., t. 39 (1929), n° 930. — Voir aussi C. LUPLAU JANSSEN, « Mikrometermessungen von Doppelsternen » et « Minimale hypothetische Parallaxen für einige Doppelsterne », A. N., t. 235 (1929), nos 5636 et 5638.

(70) O. STRUVE, « Intensities of Calcium Lines in early Type

Stars », H. C. O. *bull.* 857 ; « Further Work on interstellar Calcium », Aph. J., t. 67 (1928, 1), p. 353 ; « The Determination of stellar Distances from Intensities of the detached Calcium Lines K », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 567.

(71) O. Struve, « The Stark Effect as a Means of determining comparative absolute Magnitudes », Aph. J., t. 70 (1929, 2), p. 237. — Voir aussi E. A. Milne, « A Null Effect in the Theory of the Influence of absolute Magnitude on stellar Spectra », H. C. O. *bull.* 870 (1929).

(72) A. Young et A. Farnsworth, « Proper Motions of certain long-period variable Stars », An. J., t. 39 (1929), nº 916. — J. Porter, « Notes on proper Motions », ibid., nº 917. — H. Knox-Shaw, « Faint Stars in the selected Areas with large proper motion », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 267. — A. Kahrstedt, « Ueber die systematischen Fehler der Eigenbewegungen des N. F. K. in Rektaszension », M. N., t. 255 (1929), nº 5637.

(73) M. S. Kovalenko, « On the peculiar Motions of faint Stars », An. J., t. 39 (1929), nos 916, 922, 926. — Sur les vitesses radiales : J. Duncan et H. Mitchell, « The radial Velocity of β Cephei... », Aph. J., t. 70 (1929, 2), p. 127 ; W. S. Adams, A. Joy, R. Sanford et G. Strömberg, « The radial Velocities of 741 Stars », ibid., p. 207 ; W. Campbell, « On the probable Errors of some stellar radial Velocities observed at the Cape of Good Hope and at Mt. Hamilton and Santiago », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 506. — F. Mrazek, « Ueber den Zusammenhang zwischen Radialgeschwindigkeit und Lichtwechsel des Veränderlichen R Lyrae », A. N., t. 236 (1929), nº 5638.

(74) J. Shilt, « The Star Streams », An. J., t. 39 (1929), nº 927.

(75) R. Tucker, « Parallactic Motion from the Harvard AG Zone », An. J., t. 39 (1929), nº 911 ; « Parallactic Motion from the preliminary general Catalogue of Boss », ibid., nº 919. — H. Mineur, « Recherches statistiques sur l'apex solaire et sur le vertex de la répartition des vitesses stellaires », C. R., t. 188 (1929, 1), p. 1378. — « J. M. Mohr, Sur la vitesse absolue du Soleil », ibid., p. 1537, et « Ueber die Raumgeschwindigkeit der Sterne », A. N., t. 236 (1929), nº 5642.

(76) E. Hertzsprung, « The Pleiades », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 660.

(77) C. J. Krieger, « A Determination of Magnitudes, Spectral Types and Color Indices in the Scutum Cloud with a statistical Discussion », L. O. B., 416 (1929).

(78) B. Mac Laughlin, « Distances of variable Stars in the η Carinae Star Clouds », An. J., t. 39 (1929), nº 917.

(79) W. Smart, « The moving Foreground of the Large Magellanic Cloud », M. N., t. 90 (1929-1930), p. 112.

(80) H. Shapley et H. Sawyer, « The Distances of ninety-three globular Star Clusters », H. C. O. *bull.* 869 (1929). — Au même observatoire : F. Hogg, « A Method for the Photometry of the

Surfaces, with an Application to the globular Cluster Messier 13 », ibid., 870 (1929).

(81) J. Baillaud, « Détermination du pôle galactique, d'après les données des Selected Areas », C. R., t. 188 (1929, 1), p. 377.

(82) J. M. Baldwin, « Alignement Chart connecting Position Angle and Distance of the Apex of the Sun's Way, and galactic Co-ordinates, with equatorial Co-ordinates », M. N., t. 89 (1928-1929), p. 453 ; voir *Publications of the Dominion Astrophysical Observatory*, t. 4, n° 4. — Dans le plan galactique, l'axe des x, origine des longitudes galactiques, est son intersection avec le plan passant par les pôles galactiques et la direction de l'apex solaire : les coordonnées équatoriales adoptées pour celui-ci sont une ascension droite de 271° et une déclinaison de 28°. — Voir aussi P Emanuelli, Tavole per la trasformazione delle coordinate equatoriali in coordinate galattiche, Rome 1929.

(83) F. Dyson, « Note on the Rotation of the galactic System », M. N., t. 90 (1929-1930), p. 233. — Voir aussi J. Plaskett, « The Rotation of the Galaxy », M. N., t. 88 (1927-1928), p. 395 ; B. Lindblad, « Ueber den Bewegungzustand des Sternsystems », A. N., t. 236 (1929), n° 5652.

(84) J. Schilt, « Galactic Rotation derived from the proper motions of Boss's P. G. C. », An. J., t. 39 (1929), n° 913 ; J. Merrill, « Solar Apex and galactic Rotation from the Yale 50°-55° Catalogue », ibid., n° 921. — Voir aussi H. Mineur ,« Sur la rotation de la Galaxie » et « Sur la rotation de l'amas local », C. R., t. 188 (1929, 1) pp. 236 et 1086 ; L. Hufnagel, « Note on the galactic Rotation », H. C. O. *bull.* 863 (1929).

(85) Cependant, il n'est pas certain qu'il y ait indépendance entre les nébuleuses spirales et notre Galaxie. Il y a lieu d'examiner la relation que C. D. Perrine dénonce entre la vitesse radiale des nébuleuses et leur latitude galactique : « The motions and status of the spiral Nebulae and globular Clusters », A. N., t. 236 (1929), n° 5661.

(86) E. Hubble, « A spiral Nebula as a stellar System, Messier 31 », Aph. J., t. 69 (1929, 1), p. 103. — Sur la photométrie des nébuleuses : A. Markov, « On the Nature of spiral and gaseous Nebulae », A. N., t. 234 (1929), n° 5609, et t. 235 (1929), n° 5622.

(87) H. Shapley et A. Hames, « The Coma-Virgo Galaxies : I. On the Transparency of Inter-galactic Space ; II. Distribution Charts and Frequency Curves ; III. Form and Concentration ; IV. Second note on Form and Concentration ; V. A Consideration of Surface Brightness », H. C. O., *bull.* 864, 865, 866, 869 (1929). — Voir aussi H. Shapley, « On the Classification of Extra-galactic Nebulae », ibid., 849 (1927), et « Relation of apparent Magnitude to angular Diameters for globular Clusters », ibid., 864 (1929). — A propos de la transparence des milieux interstellaires, et relativement, cette fois, au milieu intragalactique : B. Gerasimovic et O. Struve, « Physical Properties of a gaseous Substratum in the

Galaxy », Aph. J., t. 69 (1929, 1), p. 7 ; il s'agit ici de nuages de calcium qui seraient répandus dans l'espace interstellaire et qui révèlent leur présence par des raies spectrales ne manifestant pas l'effet Doppler-Fizeau ou le manifestant autrement que les autres raies du spectre : O. Struve, « Die systematischen Geschwindigkeiten der interstellaren Ca-Massen », A. N., t. 235 (1929), n° 5632. — Voir aussi H. N. Russell, « On meteoric Matter near the Stars », Aph. J., t. 69 (1929, 1), p. 49. — Voir aussi C. Schalen, « Zur Frage einer allgemeiner Absorption des Lichtes im Weltraum », A. N., t. 236 (1929), n° 5656.

N° 75.

Critérium d'existence

de la dérivée normale d'un potentiel de surface en un point de la surface active

par M. C. de la Vallée Poussin (1)

1. Remarques préliminaires. Énoncé du critérium. — Considérons une surface s sur laquelle est répandue une masse agissante, sans épaisseur, de densité ρ supposée continue. On suppose que cette surface admet en chaque point un plan tangent, dont l'orientation varie d'une manière continue avec la position du point de contact.

Soit U le potentiel newtonien dû à la surface s en un point M de l'espace. On sait que c'est une fonction continue du point M dans tout l'espace. Si le point M se déplace dans une direction donnée, la dérivée de U dans cette direction est égale à la composante de la force motrice suivant la même direction, sauf peut-être si le point M se trouve sur la surface elle-même. Dans ce cas, la force motrice est généralement indéterminée, mais la dérivée normale du potentiel reste déterminée moyennant certaines conditions supplémentaires imposées à la surface. Nous allons indiquer un *critérium* très simple et très général qui permet de s'assurer de l'existence de cette dérivée normale.

Soient P_0 un point donné sur la surface, et P un point variable sur celle-ci. Nous supposerons que le point P_0 n'est pas situé sur le bord de la surface, au cas qu'elle en ait un. Nous désignerons par r_0 la distance P_0P, et par φ la valeur absolue (comprise entre 0 et π) de l'angle que font entre elles les normales P_0N_0 et PN menées, du même côté de la surface s, aux points P_0 et P.

Nous nous proposons de montrer que l'existence de l'intégrale

$$(1) \qquad \iint_s \varphi \frac{ds}{r_0^2},$$

étendue à tous les éléments d'aire ds de la surface, assure l'existence de la dérivée du potentiel U au point P_0 dans le sens de la normale P_0N_0. Cette existence de l'intégrale (1) fournit donc, pour celle de la dérivée

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 50 (1930), Série A, *Sciences mathématiques*, p. 132.

le critérium que nous avons en vue d'établir. Mais elle entraîne encore, comme nous le verrons, la continuité, de ce côté de la surface, de la dérivée le long de la normale.

On admet généralement dans l'étude de la dérivée normale de U que, quand r_0 tend vers zéro, φ est un infiniment petit de l'ordre de r_0, auquel cas l'intégrale (1) ne présente aucune singularité. Mais l'existence de l'intégrale subsiste dans des cas très généraux où le quotient $\varphi : r_0$ devient infini quand r_0 tend vers zéro. L'application du critérium va donc bien au delà de l'hypothèse précédente.

2. Existence d'une intégrale auxiliaire. — L'existence de l'intégrale (1) entraîne celle d'une autre intégrale que nous allons former. Par la normale P_0N_0 au point P_0 et par le point P, menons un plan Π qui détermine une section normale P_0P de la surface. Dans le plan Π, élevons la normale PN′ à la section au point P du même côté que P_0N_0, et soit φ_1 l'angle absolu (compris entre 0 et π) des deux normales P_0N_0 et PN′ à la section. Cet angle φ_1 est inférieur à l'angle φ des deux normales à la surface. En effet, les deux droites PN et PN′ sont dans le plan normal en P à la section, plan, par conséquent, normal au plan Π. Donc PN′ est la projection de PN sur le plan Π qui contient P_0N_0, et PN′ fait avec P_0N_0 un angle moindre que PN.

Donc, puisque $\varphi_1 < \varphi$, l'existence de l'intégrale (1) assure bien celle de l'intégrale

$$\iint_S \varphi_1 \frac{ds}{r_0^2}. \tag{2}$$

3. Existence d'une seconde intégrale auxiliaire. — Soit θ (positif ou négatif) l'inclinaison de la corde P_0P sur le plan tangent en P_0 (ou sur la tangente P_0T_0 à la section normale). Je dis que l'existence de l'intégrale (2) assure à son tour celle de l'intégrale

$$\iint_S |\sin\theta| \frac{ds}{r_0^2}. \tag{3}$$

Nous allons le prouver.

Dans le plan tangent à la surface au point P_0, traçons un cercle γ de centre P_0 et de rayon x_1. Soit σ la portion de s qui se projette sur γ. Le cercle γ est supposé assez petit pour que les angles φ et φ_1 restent inférieurs à 1 dr. sur σ.

Considérons un système de coordonnées polaires de pôle P_0 dans le plan tangent ; soit x le rayon vecteur et ω l'argument. Soit encore $d\gamma$ la projection de ds sur le plan tangent. Comme les rapports $ds : d\gamma$ et $r_0 : x$

restent compris, sur σ, entre des nombres positifs fixes, l'existence de l'intégrale (2) (étendue à σ) entraîne celle de l'intégrale

$$\iint_{\Upsilon} \varphi_1 \frac{d\Upsilon}{x^2} = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{x_1} \varphi_1 \frac{dx}{x} .$$

Soit ω l'orientation de la tangente P_0T_0 à la section normale P_0P. Prenons cette tangente pour axe des x et la normale P_0N_0 comme axe des y dans le plan normal Π de la section. Soit y l'ordonnée du point de la section dont l'abscisse est x, et soit β la valeur absolue de y. On a

$$\frac{d\beta}{dx} = \pm \frac{dy}{dx} = \pm \operatorname{tg} \varphi_1 .$$

Donc l'existence de l'intégrale écrite en dernier lieu permet d'affirmer celle de l'intégrale qui est écrite au premier membre de l'équation ci-dessous et dont cette équation donne la transformation par intégration par parties :

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{x_1} \frac{d\beta}{x} = \int_0^{2\pi} \frac{\beta_1}{x_1} d\omega + \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{x_1} \frac{\beta}{x} \frac{dx}{x} .$$

Au second membre, la première intégrale ne présente aucune singularité et est, par conséquent, bien déterminée. Il s'ensuit que la seconde intégrale l'est aussi. Comme $\beta : x$ est égal à $|\operatorname{tg} \theta|$, nous avons ainsi démontré l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{x_1} |\operatorname{tg} \theta| \frac{dx}{x} = \iint_{\Upsilon} |\operatorname{tg} \theta| \frac{d\Upsilon}{x^2} .$$

Mais x est $< r_0$ et le rapport $d\Upsilon : ds$ reste compris, sur σ, entre deux nombres positifs fixes. Donc l'existence de la dernière intégrale entraîne celle de la suivante

$$\iint_{\sigma} |\operatorname{tg} \theta| \frac{ds}{r_0^2} ,$$

et *à fortiori* celle de l'intégrale (3) écrite au début, car il n'y a de singularité que si $r_0 = 0$ (donc au seul point P_0).

4. Borne supérieure d'une troisième intégrale auxiliaire. — Menons la normale P_0N_0 au point P_0 de la surface et considérons sur cette normale un point M, *suffisamment rapproché du point* P_0 *pour que* MP *soit la plus courte distance du point* M *à la surface*. Désignons par ψ l'angle que fait avec la normale P_0N_0 le rayon PM mené d'un autre point P de la surface, ces deux directions ayant le sens qu'indique la notation. Formons alors l'intégrale

$$\iint_{S} |\cos \psi| \frac{ds}{r^2} . \tag{4}$$

Il s'agit de prouver que cette intégrale admet une borne μ indépendante de la position du point M sur la normale considérée P_0N_0.

A cet effet, nous décomposons s en deux parties s_0 et s_1. La première s_0, qui contient le point P_0 dans son intérieur, sera supposée assez petite pour que l'angle φ reste, dans toute son étendue, inférieur à un nombre positif donné $\alpha < \frac{\pi}{2}$. L'autre partie s_1 s'étend au reste de la surface s et il est clair que l'intégrale sur s_1 est bornée, puisque, sur s_1, le rayon r reste supérieur à un nombre fixe.

Il suffit donc de s'occuper de l'intégrale sur s_0, à savoir

$$\iint_{s_0} |\cos\psi| \frac{ds}{r^2}.$$

Soit δ la distance MP_0 ; menons un cylindre de révolution de rayon δ autour de la normale MP_0. Appelons s_0' la portion de s_0 comprise dans ce cylindre et (le cas échéant) s_0'' celle qui lui est extérieure. L'intégrale sur s_0 est la somme de celles sur s_0' et s_0''.

L'intégrale sur s_0' est bornée. En effet, l'aire s_0' se projette sur le plan tangent en P_0 à l'intérieur d'un cercle de rayon δ et d'aire $\pi\delta^2$; l'aire s_0' est donc $< \pi\delta^2 : \cos\alpha$. D'autre part, δ est $< r$ (car c'est, par hypothèse, la plus courte distance de M à la surface). On a donc

$$\iint_{s_0'} |\cos\psi| \frac{ds}{r^2} < \frac{s_0'}{\delta^2} < \frac{\pi}{\cos\alpha}.$$

L'intégrale sur s_0'' est bornée aussi. Soit ψ_0 la valeur de ψ quand le point M vient en P_0, c'est-à-dire l'angle du rayon PP_0 avec la normale P_0N_0 (de sens indiqués par la notation). Par la formule

$$|\cos\psi| < |\cos\psi_0| + \sin|\psi - \psi_0|,$$

qui se tire immédiatement du développement de $\cos[\psi_0 + (\psi - \psi_0)]$, on a

$$\iint_{s_0''} |\cos\psi| \frac{ds}{r^2} < \iint_{s_0''} |\cos\psi_0| \frac{ds}{r^2} + \iint_{s_0''} \sin|\psi - \psi_0| \frac{ds}{r^2}.$$

Au second membre, la première intégrale est bornée, car on a $\cos\psi_0 = \pm\sin\theta$ et elle n'est qu'une partie de l'intégrale (3), supposée existante.

Portons notre attention sur la seconde intégrale. On a $\sin|\psi - \psi_0| < \delta : r$, car $\psi - \psi_0$ est l'angle en P du triangle MPP_0. Par conséquent, on a

$$\iint_{s_0''} \sin|\psi - \psi_0| \frac{ds}{r^2} < \delta \iint_{s_0'} \frac{ds}{r^2}.$$

Évaluons cette dernière intégrale en utilisant les coordonnées polaires dans le plan tangent, x et ω, déjà définies (n° 3). L'aire d'intégration est extérieure au cercle de rayon δ et x est $< r$; il vient donc

$$\iint_{s_o''} \sin\,\psi - \psi_o \,|\,\frac{ds}{r^2} < \delta \iint_{s_o''} \frac{x\,dx\,d\omega}{r^3 \cos\varphi} < \frac{\delta}{\cos\alpha}\int_0^{2\pi} d\omega \int_\delta^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

Cette borne est égale à $\dfrac{2\pi}{\cos\alpha}$, ce qui achève la démonstration.

5. Dérivée du potentiel suivant la normale en un point M de celle-ci extérieur à la surface. — Soit M un point situé sur la normale P_oN_o au point P_o, menée d'un côté déterminé de la surface. La valeur du potentiel U dû à une couche sans épaisseur de densité ρ répandue sur la surface S, est donnée par l'intégrale de surface

$$U = \iint_S \frac{\rho\,ds}{r}.$$

La dérivée de U au point M extérieur à la couche dans le sens de la normale P_oN_o se calcule, sans difficulté, par la règle de Leibniz, qui donne, l'angle ψ étant défini comme au n° précédent,

$$\frac{dU}{dn} = \iint_S \rho\,\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) ds = -\iint_S \rho\,\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds.$$

6. Limite de la dérivée précédente quand le point M tend vers le point P_o de la surface. — Soit ϵ un nombre positif donné, aussi petit qu'on veut ; du point P_o comme centre décrivons une surface sphérique de rayon R assez petit pour satisfaire aux conditions suivantes :

1° La surface S coupe la sphère suivant une ligne simple qui partage la surface sphérique en deux parties d'aires à peu près égales et, d'une manière plus précise, comprises toutes deux entre $(2\pi \pm \epsilon)R^2$.

2° L'angle φ et la variation de la densité ρ seront tous deux de module $< \epsilon$ sur la portion σ de s intérieure à la sphère.

3° On aura

$$\iint_\sigma \varphi\,\frac{ds}{r^2} < \epsilon,$$

ce qui est possible en rendant σ suffisamment petit, puisque cette intégrale existe en vertu du critérium (1) lui-même.

Nous avons appelé σ la portion de s intérieure à la sphère ; désignons par s' la portion extérieure, nous avons

$$\iint_S \rho\,\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds = \iint_\sigma \rho\,\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds + \iint_{s'} \rho\,\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds.$$

Ceci posé, nous pouvons prendre le point M suffisamment voisin de P_0, pour que l'on ait

$$\iint_{S'} \rho \frac{\cos\psi}{r^2} ds = \iint_{S'} \rho \frac{\cos\psi_0}{r_0^2} ds + \eta$$

avec η de module $< \epsilon$, car l'intégrale du second membre est la limite de la première quand M tend vers P_0. Ici, il n'y a pas de difficulté, car il n'y a pas de discontinuité sur s'.

Considérons l'intégrale sur σ. Soit ρ_0 la densité au point P_0 ; nous décomposons cette intégrale en deux autres comme il suit :

$$\iint_{\sigma} \rho \frac{\cos\psi}{r^2} ds = \rho_0 \iint_{\sigma} \frac{\cos\psi}{r^2} ds + \iint_{\sigma} (\rho - \rho_0) \frac{\cos\psi}{r^2} ds .$$

Comme $\rho - \rho_0$ est de module $< \epsilon$ sur σ, la seconde intégrale du second membre est de module inférieur à

$$\epsilon \iint_{\sigma} |\cos\psi| \frac{ds}{r^2} < \mu\epsilon,$$

où μ est la borne fixe que l'on peut assigner à l'intégrale auxiliaire (4).

Considérons la première intégrale du second membre. Soit (r, n) l'angle du rayon vecteur $r = PM$ avec la normale PN élevée au point P du même côté de la surface que P_0N_0. Cet angle ne diffère de l'angle ψ que fait r avec P_0N_0 que d'un angle inférieur à la variation d'orientation φ de la normale entre P_0 et P. L'angle (r, n) est donc égal à ψ sauf une erreur $< |\varphi|$. On a donc

$$\iint_{\sigma} \frac{\cos\psi}{r^2} ds = \iint_{\sigma} \frac{\cos(r, n)}{r^2} ds + \eta',$$

où, grâce au choix de R (condition 3°), on a

$$|\eta'| < \iint_{\sigma} |\varphi| \frac{ds}{r^2} < \epsilon .$$

Mais l'élément de l'intégrale obtenue au second membre de la dernière équation,

$$\frac{\cos(r, n)}{r^2} ds ,$$

est l'angle solide sous lequel l'élément ds est vu du point M, avec un signe, positif ou négatif, suivant que la normale PN est du même côté de la surface que le rayon r ou du côté opposé. L'intégrale de cet élément sur σ est donc l'angle solide sous lequel on voit du point M la portion de la sphère située de l'autre côté de la surface. Cet angle serait compris entre $2\pi \pm \epsilon$ si M venait en P_0 (condition 1° imposée à R). Nous pouvons

donc supposer le point M suffisamment voisin de P_0 pour que cet angle solide soit compris entre $\frac{\pi}{2} \pm 2\epsilon$.

Donc, sous la condition que M soit suffisamment voisin de P_0, nous avons, en définitive,

$$\iint_S \rho \frac{\cos\psi}{r^2} ds = \iint_{S'} \rho \frac{\cos\psi_0}{r_0^2} ds + 2\pi\rho_0 + \eta''$$

$$|\eta''| < \epsilon(1 + \mu + 3\rho_0).$$

Mais nous pouvons faire tendre simultanément R et ϵ vers zéro, et le point M vers P_0. Il vient donc, à la limite, η'' tendant vers zéro avec ϵ,

$$\lim \frac{dU}{dn} = -\lim \iint_S \rho \frac{\cos\psi}{r^2} ds = -\iint_S \rho \frac{\cos\psi_0}{r_0^2} ds - 2\pi\rho_0.$$

En effet, s' embrasse successivement tous les points de s quand R tend vers zéro. Alors l'intégrale sur s' tend, par définition, vers l'intégrale sur s. D'ailleurs, la dernière intégrale est absolument convergente, car $\cos\psi_0 = \pm \sin\theta$ et cette intégrale a, au signe près, le même élément que (3).

7. Dérivée normale du potentiel en un point de la surface. — La dérivée du potentiel U au point P_0 dans le sens de la normale P_0N_0 est donnée par la formule précédente. On a, en ce point,

$$\frac{dU}{dn} = -\iint_S \rho \frac{\cos\psi_0}{r_0^2} ds - 2\pi\rho_0.$$

C'est la conséquence de la formule des accroissements finis,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\xi),$$

où ξ est compris entre x et $x+h$. Si $f'(\xi)$ a une limite quand ξ tend vers x, cette limite est $f'(x)$, car c'est la limite du premier membre de l'équation précédente quand h tend vers zéro. Ce principe s'applique dans le cas actuel, puisque, le long de la normale, U est fonction continue de la seule variable $x = P_0M$ et que sa dérivée au point x a une limite déterminée quand x tend vers zéro.

8. Formule de Poisson. — Convenons que la normale précédente P_0N_0 est de sens positif et que la normale opposée est de sens négatif. La dérivée précédente est celle suivant la normale positive. Celle dans le sens opposé est donnée par la formule analogue, mais la définition de ψ est changée. Si l'on veut que ψ reste l'angle avec la normale positive, il faut le remplacer par $\psi + \pi$, et $\cos\psi$ change de signe. La dérivée dans

le sens de la normale négative ne diffère de la précédente que par le changement de signe de l'intégrale. Si l'on désigne par dn et dn' les éléments différentiels sur les deux normales opposées, et qu'on ajoute entre elles les dérivées normales dans les deux sens opposés, on obtient la formule de *Poisson*

$$\frac{dU}{dn} + \frac{dU}{dn'} = -4\pi\rho_o ,$$

qui est donc légitimée également par le critérium du début.

9. Extension au potentiel logarithmique d'une ligne. — L'adaptation de l'analyse précédente au cas du potentiel logarithmique de ligne ne comporte que des simplifications. Nous pouvons donc nous contenter d'énoncer les résultats.

Soit s une ligne plane sur laquelle est répandue une masse linéaire, de densité ρ supposée continue. La dérivée normale du potentiel U en un point P_o de la ligne sera bien déterminée, sous la seule condition d'existence de l'intégrale

$$\int_s \varphi \frac{ds}{r_o} ,$$

où φ est l'angle absolu (compris entre 0 et π) que fait la tangente au point variable P sur la ligne avec le point donné P_o et où r_o est le rayon PP_o.

Si ce critérium est vérifié, la dérivée $\frac{dU}{dn}$, dans le sens d'une normale donnée au point P_o, sera donnée par la formule

$$\frac{dU}{dn} = -\int_s \rho \cos\psi_o \frac{ds}{r_o} - \pi\rho_o ,$$

où ψ_o est l'angle que fait le rayon PP_o avec la normale du sens convenu.

Si l'on considère les deux dérivées normales de sens opposés, on obtient la formule qui correspond à celle de Poisson pour le potentiel newtonien, à savoir

$$\frac{dU}{dn} + \frac{dU}{dn'} = -2\pi\rho_o .$$

Si, par exception, le point P_o était une extrémité de la ligne s, il faudrait, dans les deux formules précédentes, réduire de moitié le dernier terme.

Une remarque analogue s'applique d'ailleurs au potentiel newtonien. Si le point P_o vient sur le bord de la surface agissante S (à supposer qu'elle en ait un) et que ce bord admette une tangente, il faut réduire de moitié le second membre de la formule de Poisson.

BIBL.
LONDIN.
UNIV.

PUBLICATIONS

DU LABORATOIRE

D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

Secrétaire, **M. ALLIAUME**

Vol. V (nos 56 et 57)

1928

LOUVAIN

LIBRAIRIE UNIVERSITAIRE

UYSTPRUYST, éditeur

1929

Lincoln Univ
Pratt